

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Modelagem dinâmica de bicicletas com suspensão integral (“full suspension”)

Atila Felipe Onaya

Orientador Prof.Dr. Demétrio C. Zachariadis

São Paulo

2012

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Modelagem dinâmica de bicicletas com suspensão integral (“full suspension”)

Atila Felipe Onaya

Orientador Prof.Dr. Demétrio C. Zachariadis

São Paulo

2012

Onaya, Atila Felipe

**Modelagem dinâmica de bicicleta com suspensão integral
("full suspension") / A.F. Onaya. – São Paulo, 2011.
105 p.**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Dinâmica 2. Simulação (Aprendizagem) 3. Conforto huma-
no 4. Vibrações I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia Mecânica II. t.**

Figura 1: Estrutura básica de uma bicicleta.	6
Figura 2: Modelo apresentado por Waechter Et al.....	11
Figura 3: Modelo apresentado por He et al.	11
Figura 4: Modelo de rugosidade do piso.....	12
Figura 5: Modelo físico com dois graus de liberdade.	14
Figura 6: Modelo físico com três graus de liberdade	20
Figura 7: Mola inclinada	21
Figura 8: Modelo físico com quatro graus de liberdade	25
Figura 9: Modelo do ciclista	26
Figura 10: Modelo físico com cinco graus de liberdade.....	32
Figura 11 – Modelo físico da roda dianteira.	33
Figura 12: Modelo físico com seis graus de liberdade	34
Figura 13: Geometria 1.....	35
Figura 14: Geometria 2.....	36
Figura 15: Geometria 3.....	37
Figura 16: Geometria 4.....	38
Figura 17: Geometria 5.....	39
Figura 18 - Lugar dos pólos do sistema de 2 graus de liberdade.	44
Figura 19 – Diagrama de Bode do sistema de 2 graus de liberdade para a variável ângulo de pitch do ciclista.....	45
Figura 20 - Diagrama de Bode do sistema de 2 graus de liberdade para a variável deslocamento vertical do ciclista.....	46
Figura 21: Resposta ao degrau unitário $q1_2$	47
Figura 22: Resposta ao degrau unitário $q2_2$	47
Figura 23 - Resposta temporal do ângulo de pitch do ciclista para o modelo com 2 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.	48
Figura 24 - Resposta temporal do deslocamento vertical do ciclista para o modelo com 2 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.	48
Figura 25 - Lugar dos pólos do sistema de 3 graus de liberdade.	50
Figura 26 – Diagrama de Bode do sistema de 3 graus de liberdade para o variável ângulo de pitch do ciclista.....	51
Figura 27 - Diagrama de Bode do sistema de 3 graus de liberdade para a variável deslocamento vertical do ciclista.....	52
Figura 28: Resposta ao degrau unitário $q1_3$	52
Figura 29: Resposta ao degrau $q2_3$	53
Figura 30: Resposta ao degrau $q5_3$	53
Figura 31 - Resposta temporal do ângulo de pitch do ciclista para o modelo com 3 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.	54
Figura 32 - Resposta temporal do deslocamento vertical do ciclista para o modelo com 3 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.	55
Figura 32 - Lugar dos pólos do sistema de 4 graus de liberdade.	57
Figura 33 – Diagrama de Bode do sistema de 4 graus de liberdade para a variável ângulo de pitch do ciclista.....	58

Figura 34 - Diagrama de Bode do sistema de 4 graus de liberdade para a variável deslocamento vertical do ciclista.....	59
Figura 35 - Resposta temporal do ângulo de pitch do ciclista para o modelo com 4 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.	60
Figura 36 - Resposta temporal do deslocamento vertical do ciclista para o modelo com 4 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.	61
Figura 37: Resposta ao degrau unitário q1_4	61
Figura 38: Resposta ao degrau unitário q2_4	62
Figura 39: Resposta ao degrau unitário q3_4	62
Figura 40: Resposta ao degrau unitário q4_4	62
Figura 43 - Diagrama do Simulink.	65
Figura 44: Força atuante quadril modelo 4.....	66
Figura 45: Força atuante no braço modelo 4.....	66
Figura 46: força atuante no braço modelo 5.....	67
Figura 47: Força atuante no quadril modelo 6.....	67
Figura 48: Entrada em regime permanente.....	68
Figura 49: Resposta em regime sistema com dois graus	69
Figura 50: Resposta em regime sistema com três graus.....	69
Figura 51: Resposta em regime sistema com quatro graus quadro	70
Figura 52: Resposta em regime sistema com quatro graus ciclista	70
Figura 53: Resposta em regime sistema com cinco graus quadro	71
Figura 54: Resposta em regime sistema com cinco graus ciclista.....	71
Figura 55: Resposta em regime sistema com seis graus quadro	72
Figura 56: Resposta em regime sistema com seis graus ciclista	72
Figura 57: Resposta em regime sistema com seis graus suspensões.	73
Figura 58: Diagrama simulink modelo 6.....	101

Índice

1.	Resumo	1
2.	Abstract	2
3.	Introdução	3
3.1	A bicicleta no Brasil	3
3.2	Descrição do problema e objetivos	3
4.	A bicicleta	6
5.	Fundamentos teóricos de modelagem de sistemas	7
5.1.1	Representação de sistemas	7
5.1.2	Estabilidade de sistemas	7
5.1.3	Características da resposta temporal de sistemas lineares	8
5.1.4	Pólos dominantes	8
5.1.5	Frequência natural do sistema	9
5.1.6	Coeficiente de amortecimento	9
5.1.7	Frequência de oscilação	9
5.1.8	Diagrama de bode	9
6.	Modelos	9
6.1	Base bibliográfica	9
6.2	Modelo de entrada do piso	12
7.	Modelos propostos para simulação	13
7.1	Modelo com dois graus de liberdade	13
7.1.1	Modelo físico	13
7.1.2	Modelo matemático	14
7.2	Modelo com três graus de liberdade	22
7.2.1	Modelo físico	22
7.2.3	Funções de transferência do modelo com 3 graus de liberdade	25
7.3	Modelo com quatro e cinco graus de liberdade	30
7.3.1	Modelo físico	30
7.3.2	Modelo matemático	30
7.3.3	Funções de transferência modelo de 4 graus liberdade	33
7.3.4	Modelo físico cinco	35
7.3.5	Modelo matemático cinco	37
7.4	Modelo com seis graus de liberdade	38
7.4.1	Modelo matemático	44

8.	Simulações dos modelos.....	45
8.1	Resposta ao degrau unitário.....	45
8.2	Modelo 2	46
8.2.2	Análise do sistema no domínio do tempo	47
8.2.3	Análise do sistema no domínio da frequência.....	48
8.2.4	Resposta do sistema	50
8.3	Modelo 3	52
8.3.2	Análise do sistema no domínio do tempo	53
8.3.3	Análise do sistema no domínio da frequência.....	54
8.3.4	Resposta do sistema	55
8.4	Modelo 4	59
8.4.2	Análise do sistema no domínio do tempo	60
8.4.3	Análise do sistema no domínio da frequência.....	61
8.4.4	Resposta do sistema	63
8.5	Análise das forças envolvidas	66
8.5.1	Elaboração do diagrama de blocos.....	66
8.6	Resposta ao regime permanente	71
8.6.1	Modelo dois.....	72
8.6.2	Modelo três	72
8.6.3	Modelo quatro	73
8.6.4	Modelo cinco	74
8.6.5	Modelo seis	75
9.	Discussões	78
9.1	Modelo de dois graus de liberdade	78
9.2	Modelo de três graus de liberdade	78
9.3	Modelo de quatro graus de liberdade.....	79
9.4	Modelo de cinco graus de liberdade	79
9.5	Modelo de seis graus de liberdade.....	80
10.	Conclusões.....	81
11.	Referências	83
12.	Anexo 1: Programas utilizados.	86
13.	Anexo 2	103

1. Resumo

O presente trabalho de conclusão de curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da USP consiste na elaboração de modelos do conjunto ciclista mais bicicleta e sua posterior simulação, a fim de obter respostas dinâmicas no tempo, para em seguida obter conclusões com relação às geometrias e critérios de projeto relativos ao conforto do ciclista.

A elaboração do trabalho seguiu as seguintes etapas: pesquisa bibliográfica, análise do problema, a obtenção de modelos físicos que representem o mais próximo possível o sistema, obtenção das equações do movimento, levantamento ou a estimativa de parâmetros físicos e geométricos com base em estudos já realizados e bicicletas disponíveis no mercado.

Como resultado final foram realizadas simulações empregando o programa (SIMULINK MATLAB marca registrada da mathworks .Inc) e scilab ambiente de programação software livre, com licenças disponíveis na universidade, para entradas provocadas pelo piso, tanto para entrada de degraus unitário e impulso, quanto para excitações provenientes do piso .

Por fim é feita uma análise dos resultados visando identificar a influência de diversas variáveis no comportamento dinâmico do conjunto, através da comparação das forças que agem sobre o ciclista para entradas do tipo degrau e impulso, fornecendo assim fatores que podem ser aperfeiçoados, estabelecendo os limites de validade dos modelos e sugestão de melhorias que possam ser introduzidas, de forma que as propostas iniciais sejam satisfeitas.

Ainda o relatório apresenta uma proposta de simulação em uma trajetória real, tendo como entrada a rugosidade média de um asfalto, adaptada por trens de degraus unitários aleatórios.

2. Abstract

This conclusion of course work in Mechanical Engineering from the Escola Politécnica da USP, is the modeling of the whole bike and rider over the subsequent simulation, in order to obtain dynamic responses in time to then draw conclusions with respect to geometries and design criteria for the comfort of the rider.

The work is followed the following steps: literature search, analysis of the problem, obtaining physical models that represent the closest possible to the system, obtain the equations of motion, assessment or estimation of physical parameters and geometric-based studies have made and bicycles on the market.

As a final result simulations were performed using the program (MATLAB SIMULINK trademark of The MathWorks. Inc) scilab and free software programming environment, with permits available at the university, caused the floor for entries, entries for both "unit step" and impulse, as for excitations from the floor.

Finally an analysis is made of the results to identify the influence of several variables on the dynamic behavior of the set, by comparing the forces acting on the rider for entries like "unit step" and impulse, thus providing factors that can be improved, establishing the limits of validity of the models and suggest improvements that could be introduced, so that the initial proposals are met.

Although the report presents a proposal for an actual trajectory simulation, taking as input the average roughness of a pavement, adapted by trains "unit step" random.

3. Introdução

3.1 A bicicleta no Brasil

No caos das grandes cidades os meios de transporte figuram como questão chave para o convívio social e qualidade de vida da população mundial. Grandes engarrafamentos somados à correria do dia a dia e ao transporte público ineficiente resultam em falta de tempo para praticar esportes e estresse; é nesse cenário que a bicicleta, meio de transporte inventado na Europa no século XIX, se insere como uma alternativa barata ao sedentarismo e a locomoção (mais detalhes da história da bicicleta podem ser encontrados na referência [1]).

Contudo a bicicleta é ainda tratada como lazer ao invés de meio de transporte efetivo e políticas públicas como construção de vias para circulação são praticamente inexistentes no Brasil, ao contrário do que ocorre em países desenvolvidos, como por exemplo, o Japão, que possui uma vasta rede de ciclovias por todo o país, a capital alemã Berlin possui a maior malha com 650 km e ainda a Inglaterra que possui um sistema central com locação de bicicletas. Hoje se estima que existam cerca de 1 bilhão de bicicletas pelo mundo, com diversos modelos e fabricantes; o mercado brasileiro é o terceiro no mundo com uma produção anual de 5,5 milhões de unidades e fica atrás somente de dois gigantes, China e Índia, respectivamente primeiro e segundo maiores produtores mundiais (dados da abraciclo [2]).

3.2 Descrição do problema e objetivos

É de conhecimento geral que todos os produtos de engenharia evoluem com os avanços tecnológicos desenvolvidos pela sociedade, como numa espiral de projeto em que o produto tende sempre a ganhar qualidade e desempenho.

Como era de se esperar a bicicleta sofreu muitas modificações desde seu primeiro modelo de madeira, atendendo a novas necessidades e melhor a necessidades antigas.

Se antes a locomoção era a principal necessidade a ser atendida pelo veículo em questão, hoje se tem como requisitos a atender também o lazer e competições esportivas. Foi com esse objetivo que as bicicletas atuais adquiriram melhor acabamento, qualidade de materiais, mais segurança e conforto. Exemplificando os itens anteriores tem-se:

- Materiais [3]: uso de materiais mais leves e resistentes para estrutura, ligas metálicas e compósitos.
- Fabricação: uso de processos mais precisos como o de montagem e soldagem, análise auxiliada por softwares.
- Segurança: desenvolvimento de freios mais confiáveis e o emprego de freios a disco em modelos de alto desempenho e estruturas mais resistentes.
- Conforto: uso de suspensões que minimizam o impacto sobre o ciclista, bancos anatômicos e reduções maiores que minimizem esforços de pedalo através das relações de velocidade angular e torque.

O problema do conforto pode-se definir dois tipos de conforto, conforto estático e dinâmico, o primeiro está relacionado à posição do ciclista em relação à bicicleta e está ligado intrinsecamente a morfologia do usuário e tamanho dos componentes selim, guidão e pedalo.

O conforto dinâmico está relacionado diretamente às vibrações provenientes das irregularidades do piso, sejam elas excitações temporárias ou permanentes, assim percebidas pelo ciclista nos pontos de contato com a bicicleta (selim, pedalo e guidão).

O deslocamento das rodas dianteira e traseira fazem com que ocorra a deformação dos elementos mecânicos e também a compressão ou tração dos tecidos moles do ciclista, eventualmente se a entrada for muito intensa em relação ao impacto, pode-se ter a solicitação até do esqueleto do usuário, se essas solicitações forem frequentes podem levar ao stress físico, causando desconforto ou até lesões.

Ainda na literatura por Y.Champoux, referência [4] afirma que para predizermos o conforto podem-se considerar as acelerações dos pontos de contato do usuário com a bicicleta, contudo quando o usuário percebe níveis de desaceleração altos ele tende por questão de estabilidade a aplicar mais força sobre o guidão ou diminuir a intensidade de pedalo, assim o nível de aceleração diminui. Por essa razão a medida proposta mais condizente com conforto são as forças transmitidas nos pontos de contato.

Considerado o acima exposto, o presente trabalho tem por principal foco o estudo da resposta dinâmica e do conforto apoiado por artigos desenvolvidos sobre o tema, os conceitos utilizados para tal apóiam-se nas disciplinas ministradas, no curso de engenharia mecânica da escola, mecânica geral A e B, modelagem de sistemas dinâmicos, vibrações e ainda os mais diversos conceitos adquiridos no decorrer do curso, como calculo numérico, resistência dos materiais e geometria analítica.

4. A bicicleta

Para familiarizar o leitor com essa sessão descreve brevemente os componentes de uma bicicleta, caso o leitor já possua tal conhecimento pode-se ir a próxima sessão.

A bicicleta pode ser descrita auxiliada na figura 1 [5]:

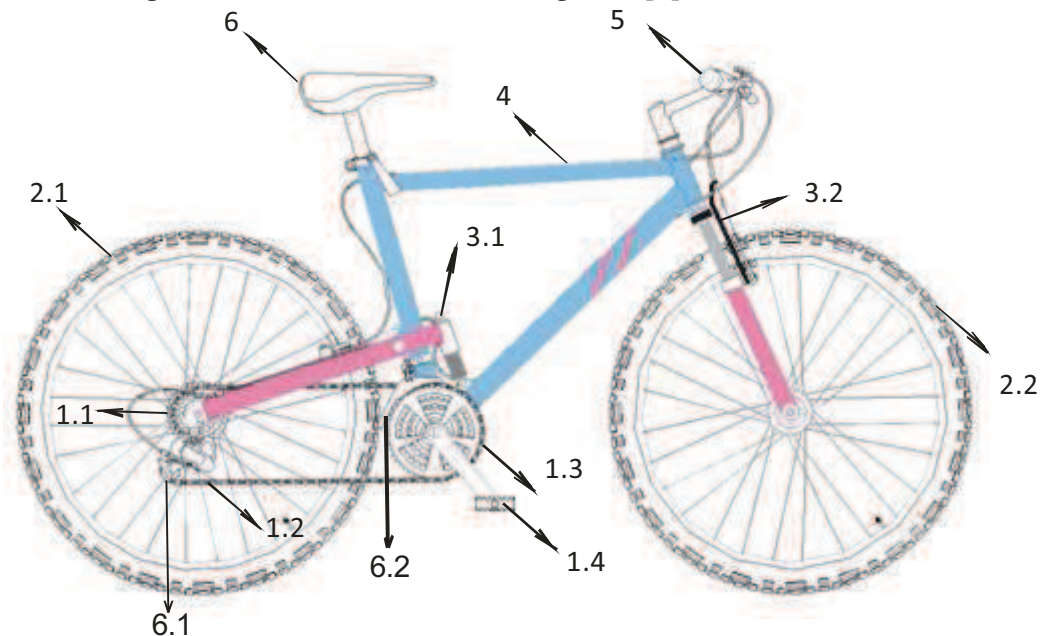


Figura 1: Estrutura básica de uma bicicleta.

Os componentes são:

- Conjunto de transmissão de torque, composto por catraca (1.1), corrente (1.2), coroa (1.3) e pedal (1.4), corrente e pé de vela.
- Conjunto de rodas, traseira (2.1) e roda dianteira (2.2), composto por pneus, rolamentos, aros e raios.
- Conjunto de amortecedores e molas, traseira (3.1) e dianteira (garfo) (3.2).
- Quadro (4), principal estrutura, geralmente tubular.
- Conjunto guiador (5).
- Selim (6).
- Conjunto de câmbios (6.1 traseiro e 6.2 dianteiro), mecanismos responsáveis pela troca de corrente nas rodas dentadas sejam elas catraca ou coroa.

As principais características de engenharia (materiais, dimensões e montagem) dos componentes são descritas com mais detalhe em [1], por hora, para a

modelagem dinâmica os componentes mais relevantes para essa análise são as rodas, quadro, selim, suspensões e garfo, pois esses representam 90% da massa do sistema bicicleta, representam mais amortecimento e elasticidade que os demais.

5. Fundamentos teóricos de modelagem de sistemas

5.1.1 Representação de sistemas

Um sistema dinâmico é aquele para o qual uma entrada variante no tempo implica numa modificação desse sistema na forma de saída, o sistema em si pode ser definido como um conjunto de parâmetros e estados físicos, as entradas por sua vez são perturbações nesses estados físicos as saídas são as respostas do sistema a essas perturbações.

Ilustrativamente para esse trabalho o sistema definido é o conjunto ciclista e bicicleta e as perturbações são as irregularidades do piso, os parâmetros físicos que definem esse sistema são as inércias, as posições geométricas e os coeficientes de amortecimento e elásticos dos elementos, podem-se descrever inúmeros sistemas e entradas. A única distinção entre essas possíveis representações são as equações matemáticas que regem o movimento. Assim seria possível avaliar outro sistema composto apenas pelas rodas, mas o leitor deve ficar atento as limitações e abrangências de um modelo em relação ao outro, em suma não existe modelo correto, o que existe são representações físicas e matemáticas de um conjunto físico que atendem a determinada necessidade bem e mal a outra.

5.1.2 Estabilidade de sistemas

Segundo Lyapunov, estabilidade é a capacidade de um sistema dinâmico tender ao seu ponto de equilíbrio quando submetido à excitação constante. Para o caso de sistemas lineares, o equilíbrio ocorre quando seu movimento se anula, e o sistema atinge um ponto de equilíbrio, denominado regime estacionário.

Como o sistema em estudo é linear e representa um fenômeno físico é de se esperar que quando o sistema fica submetido a uma entrada de energia constante não crescente o sistema seja estável, e possua um ponto de equilíbrio.

5.1.3 Características da resposta temporal de sistemas lineares

O método dos lugares dos pólos também permite analisar o comportamento do sistema modelado se baseando nas partes reais e complexas das raízes do polinômio característico da função de transferência, essa obtida por meio da transformada de Laplace do sistema de equações diferenciais do sistema. Assim:

- Caso o sistema apresente pólos com parte real positiva, o sistema é instável e não irá atingir uma posição de equilíbrio após ser excitado por um degrau unitário;
- Caso o sistema apresente pólos com parte real negativa e parte imaginária nula, o sistema terá comportamento do tipo massa-mola, ou seja, para uma entrada do tipo degrau unitário, o sistema oscila sem decaimento da amplitude, isto é, sem amortecimento e sem dissipação de energia;
- Caso o sistema apresente pólos com parte real nula e parte imaginária não nula, o sistema é de 1ª ordem com comportamento semelhante a um sistema massa-amortecedor, ou seja, o sistema estabiliza quando sujeito a uma entrada do tipo degrau unitário com atraso característico do tipo de amortecimento existente;
- Caso o sistema apresente pólos com parte real negativa e parte imaginária não nula, o sistema é de 2ª ordem com comportamento semelhante a um sistema massa-mola-amortecedor, e pode apresentar três comportamentos distintos a uma entrada do tipo degrau, dependendo do amortecimento existente na estrutura:
 - Caso a razão de amortecimento do sistema, que é a razão do amortecimento do sistema e o amortecimento crítico, seja inferior a 1, o sistema tem comportamento oscilatório amortecido, isto é, com dissipação de energia e decaimento da amplitude da oscilação;
 - Caso a razão de amortecimento do sistema seja igual a 1, o sistema não tem comportamento oscilatório, atingindo o equilíbrio rapidamente;
 - Caso a razão de amortecimento do sistema seja superior a 1, o sistema não tem comportamento oscilatório e atinge o equilíbrio cada vez mais rapidamente quando se aumenta o amortecimento da estrutura.

5.1.4 Pólos dominantes

Os pólos de um sistema representam o tipo da resposta do sistema à entradas externas. Assim, o mesmo sistema pode variar o comportamento das suas respostas caso este tenha vários pólos. Porém, alguns pólos são mais importantes,

do ponto de vista do controle do sistema, que outros, sendo estes denominados pólos dominantes.

Um pólo dominante é aquele cuja resposta seja a mais duradoura no sistema. Em outras palavras, dada uma excitação ao sistema, a respostas dos pólos não-dominantes irão atingir o equilíbrio mais rapidamente que a resposta do pólo dominante.

Pelo método dos lugares dos pólos é possível determinar os pólos dominantes do sistema pela distância deste ao eixo imaginário. Essa distância representa o quão rápido a resposta do sistema atinge o equilíbrio.

Assim, os pólos dominantes do sistema são aqueles que estão mais próximos ao eixo imaginário.

5.1.5 Freqüência natural do sistema

A freqüência natural do sistema é igual ao módulo do número complexo.

5.1.6 Coeficiente de amortecimento

O coeficiente de amortecimento é igual à razão do módulo da parte real do pólo com o módulo do pólo do sistema.

5.1.7 Freqüência de oscilação

A freqüência de oscilação do sistema é igual ao módulo da parte imaginária do pólo.

5.1.8 Diagrama de bode

O diagrama de Bode é a representação da resposta do sistema no domínio de freqüência. Esse diagrama é composto de dois gráficos logarítmicos:

- Um gráfico do ganho em decibéis em função da freqüência em Hz;
- Um gráfico do ângulo de fase em função da freqüência em Hz.

Do diagrama de Bode, as seguintes conclusões podem ser tomadas:

- Ganho na ressonância do sistema e a freqüência na qual essa ocorre, assim como o ganho nas outras freqüências;
- Inversão da fase da resposta com a entrada do sistema e a freqüência na qual essa ocorre;

6. Modelos

6.1 Base bibliográfica

As hipóteses e modelos a seguir apresentados baseiam-se em dois trabalhos realizados e divulgados nos artigos da revista “vehicle system dynamics” referencias [6] e [7] respectivamente, publicados por Matthias Waechter, Falk Riess e Norbert Zacharias na universidade alemã de Oldenburg em 2002, para modelos com suspensão dianteira e traseira e nos trabalhos de Qichang He, Xiumin Fan e Dengzhe Ma (2005) realizados na escola de engenharia mecânica e energia de Shangai (modelos sem suspensão). Os modelos físicos podem ser visualizados nas figuras 2 e 3. Comercialmente eles são conhecidos como “full-suspension” e bicicleta rígida comum.

Alem disso a referência [13] contem um vasto material sobre bicicletas rígidas e “full suspension”, mas com o enfoque em controle e estabilidade de modelos em três dimensões, para o fim desse trabalho irrelevante, mas úteis para visualizar a dinâmica apresentada pelo sistema.

Como citado no item anterior cinco componentes são os mais relevantes isso se deve ao fato deles atuarem como molas e amortecedores e inércias, são reservatórios e dissipadores de energia mecânica, ao contrário dos demais componentes que são relevantes somente pelo peso adicional que inserem no sistema, portanto têm-se como hipóteses primárias:

- Efeitos de amortecimento e dissipação adicionais de outros componentes que não sejam rodas e amortecedores são desprezíveis.
- A massa do ciclista representa mais de 80% da massa do sistema, portanto o modelo deve conter o ciclista também.
- Os efeitos de amortecimento do ciclista são aproximados pelo conjunto de uma barra articulada no selim e fixa ao conjunto guiador (5 da figura1) por uma mola e um amortecedor. O modelo pode ser visualizado na figura 2 e 3.
- O movimento estudado tem por referencial um plano com eixos cartesianos que estão fixos ao quadro.
- As vibrações induzidas pelo ato de pedalar não são consideradas.
- As forças de arrasto e sustentação devido a fluxos de ar laterais e frontais são desconsideradas nessa análise.
- As rodas não perdem contato com o chão.
- A posição x do ciclista em relação ao quadro não se altera, apenas a posição vertical z.
- As molas e amortecedores não rotacionam.

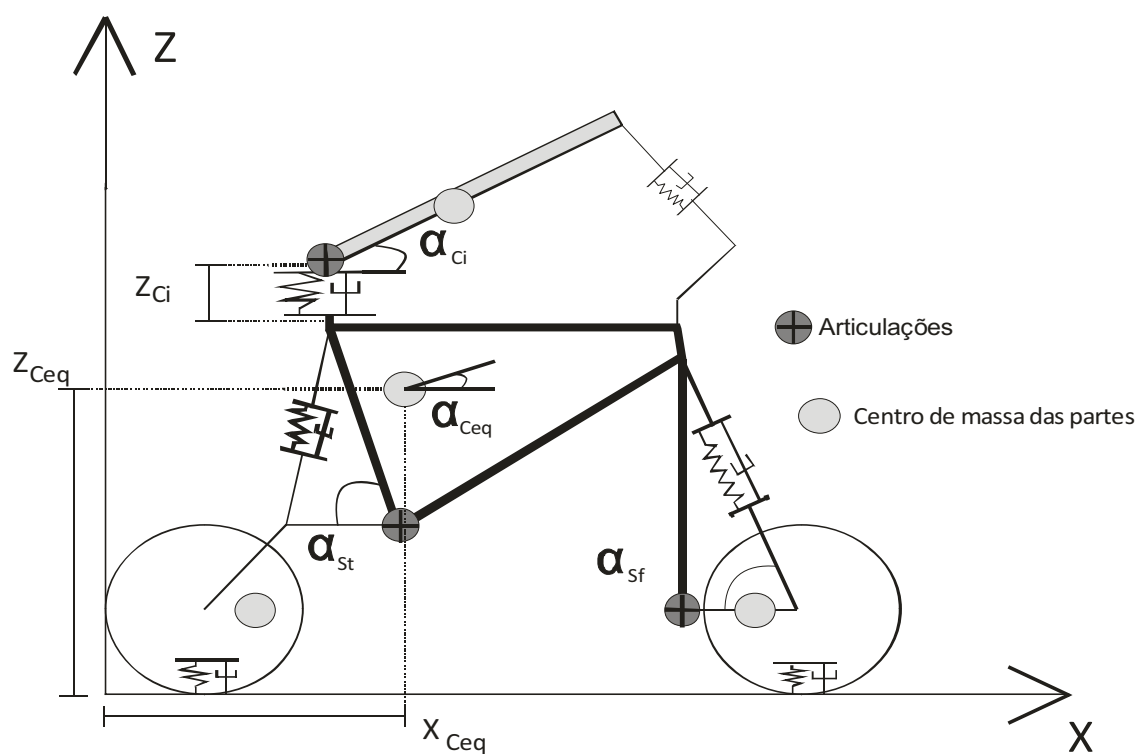


Figura 2: Modelo apresentado por Waechter Et al.

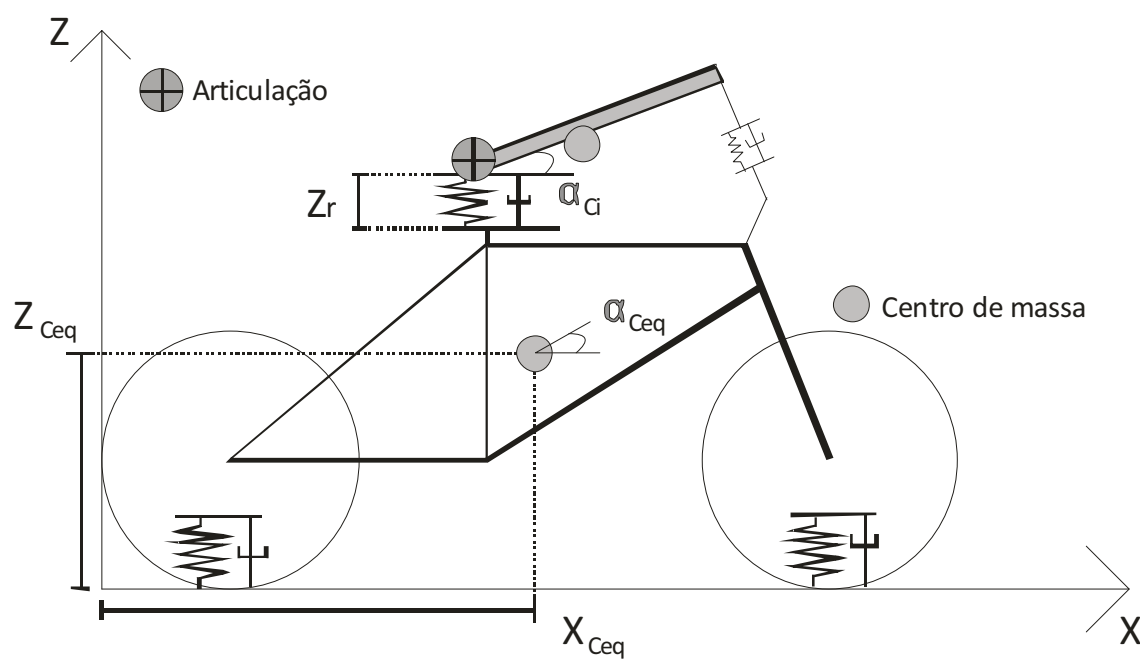


Figura 3: Modelo apresentado por He et al.

6.2 Modelo de entrada do piso

Em uma primeira aproximação segundo Champloux et al, as vibrações são induzidas pelas irregularidades do piso, tais são não cíclicas, ou seja, totalmente aleatórias.

Em uma trajetória típica a superfície mais significativa com certeza seria a do asfalto, principal via de locomoção do veículo em questão. Assim seria de grande utilidade poder utilizar um perfil médio de rugosidade como entrada de excitação nas rodas, esse perfil pode ser visualizado na figura 4 abaixo, retirada da referencia [8].

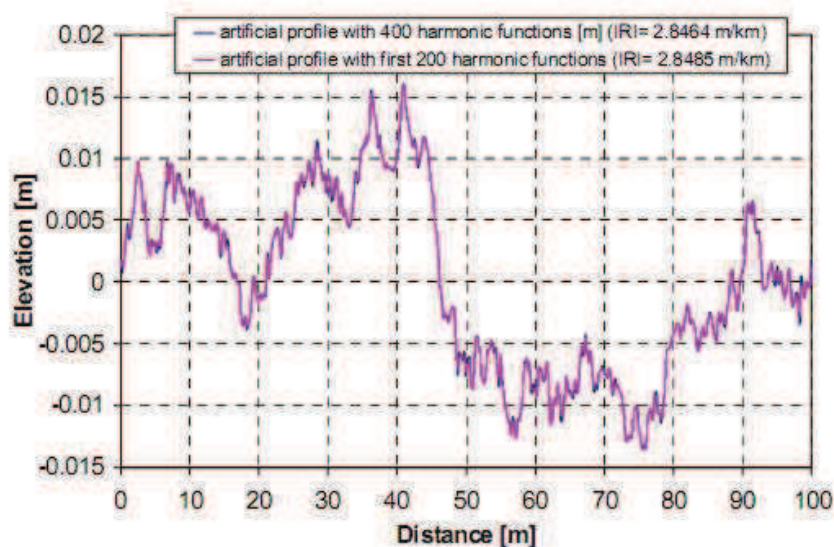


Figura 4: Modelo de rugosidade do piso.

O gráfico apresentado corresponde a um perfil gerado artificialmente, por séries de Fourier de um asfalto classificado como novo. O principal interesse para simulação advém do fato de que em uma trajetória média de cem metros as amplitudes máximas de entradas são de 0.015 metros, optou-se por simular entradas (trem de degraus) de intervalos de tempo corrigidos pela velocidade, de amplitudes aleatórias variando entre -0.010 e 0.010 metros, as predominantes apresentadas pelo gráfico anterior.

Para analisar a resposta transitória do sistema optou-se por entradas de degraus unitários de amplitude máxima de 0.05m e 0.1m defasadas no tempo pela velocidade em 3m/s do sistema, tais podem ser aproximadas pela subida em uma guia de calçada por exemplo, e entradas de impulsos unitários que

representariam uma passagem dos pneus por uma pedra por exemplo, interação rápida com uma amplitude alta. Maiores detalhes são apresentados na modelagem matemática.

7. Modelos propostos para simulação

Com base no exposto até o momento e tendo como foco o objetivo maior desse trabalho, que seria o conforto do ciclista, decidiu-se por estudar e comparar cinco modelos. Devido à dificuldade de determinação das equações diferenciais dos modelos encontrados na literatura optou-se por iniciar o estudo por modelos simples começando com dois graus de liberdade, e foi se acrescentado graus de liberdade, até que o modelo se aproxime o melhor possível da realidade, assim chegou-se até 6 graus de liberdade com o modelo com suspensões dianteira e traseira (full suspension).

Essa metodologia apesar de trabalhosa é didática e de grande utilidade para o desenvolvimento de produtos, presente em projetos básicos, visto que os modelos mais simples fornecem uma estimativa inicial de custo computacional e do trabalho a ser empregado no projeto.

7.1 Modelo com dois graus de liberdade

7.1.1 Modelo físico

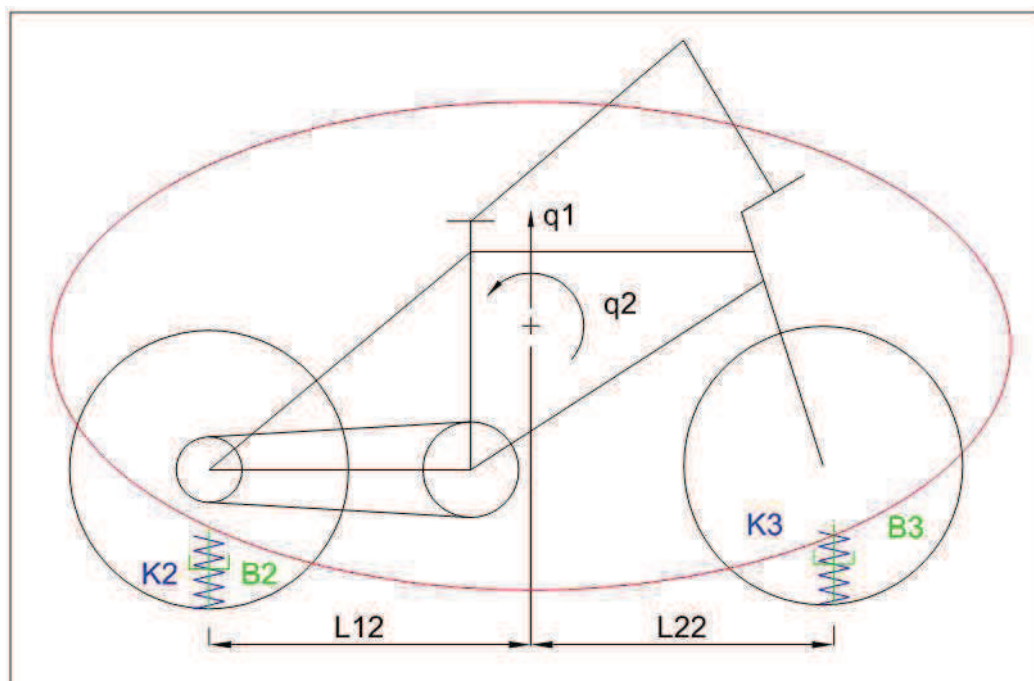


Figura 5: Modelo físico com dois graus de liberdade.

O modelo com dois graus de liberdade pode ser visualizado na figura 4, nele o ciclista mais a bicicleta são englobados em uma só inércia e momento de inércia, com duas coordenadas generalizadas q_1 e q_2 , a primeira representa o movimento linear vertical do sistema e a segunda o movimento angular de pitch do mesmo. O amortecimento é representado pelos conjuntos mola amortecedor dianteiro e traseiro, respectivamente conjunto 2 e 3, as distâncias dos conjuntos mola e amortecedor ao centro de massa do sistema são representados também, sendo L_{12} e L_{22} , o segundo índice representa o modelo, pois essas distâncias serão alteradas no próximos modelos. Esse modelo pode ser considerado como uma simplificação do modelo criado por Qichang He et al e pode ser encontrado facilmente em livros didáticos de simulação dinâmica.

7.1.2 Modelo matemático

Para a obtenção do modelo matemático aplicou-se as leis de Newton, teorema do movimento do baricentro (TMB) para a coordenada linear q_1 e teorema do movimento angular (TMA) para coordenada angular q_2 . Assim as equações são:

$$M_{12} \cdot \ddot{q}_1 = -K_3 - B_3 - K_2 - B_2$$

$$J_{12} \cdot \ddot{q}_2 = l_{12} \cdot (K_3 + B_3) - l_{22} \cdot (K_2 + B_2)$$

Força que o conjunto 3 mola amortecedor realiza sobre o quadro:

$$K_3 = k_3 \cdot q_1 + k_3 \cdot (e \cdot (\sin \theta_e - \sin(\theta_e + q_2)) - k_3 \cdot u(t).$$

A força da mola possui um termo não linear devido ao braço da força K_3 , linearizando:

$$f(q_2) = k_3 \cdot (e \cdot (\sin \theta_e - \sin(\theta_e + q_2))).$$

Por Taylor:

$$f(q_2) = f(0) + f'(0) \cdot (q_2 - 0).$$

$$f(q_2) = -k_3 \cdot e \cdot \cos(\theta_e) \cdot q_2.$$

$$K_3 = k_3 \cdot q_1 - k_3 \cdot e \cdot \cos(\theta_e) \cdot q_2 - k_3 \cdot u(t).$$

Analogamente para o amortecimento:

$$B_3 = b_3 \cdot \dot{q}_1 - b_3 \cdot \dot{q}_2 \cdot e \cdot \cos(\theta_e + q_2) - b_3 \cdot \dot{u}(t).$$

Agora a equação do amortecimento possui um termo não linear de duas variáveis, utilizando o teorema de Taylor de segunda ordem:

$$f(q_2, \dot{q}_2) = -b_3 \cdot \dot{q}_2 \cdot e \cdot \cos(\theta_e + q_2).$$

$$f(q_2, \dot{q}_2) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial q_2}(0,0) \cdot (q_2 - 0) + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2}(0,0) \cdot (\dot{q}_2 - 0).$$

$$f(q_2, \dot{q}_2) = -b_3 \cdot e \cdot \dot{q}_2 \cdot \cos \theta_e.$$

$$B_3 = b_3 \cdot \dot{q}_1 - b_3 \cdot e \cdot \dot{q}_2 \cdot \cos \theta_e - b_3 \cdot \dot{u}(t).$$

Forças que o conjunto 2 realiza sobre a bicicleta:

$$K_2 = k_2 \cdot q_1 + k_2 \cdot f \cdot (\sin \theta_f - \sin(\theta_f - q_2)) - k_2 \cdot u(t - t').$$

Linearizando:

$$f(q_2) = k_2 \cdot f \cdot (\sin \theta_f - \sin(\theta_f - q_2)).$$

Para o equilíbrio $q_2 = 0, f(0) = 0$.

$$f(q_2) = k_2 \cdot q_2 \cdot f \cdot \cos \theta_f.$$

$$K_2 = k_2 \cdot q_1 + k_2 \cdot q_2 \cdot f \cdot \cos \theta_f - k_2 \cdot u(t - t').$$

$$B_2 = b_2 \cdot \dot{q}_1 + b_2 \cdot \dot{q}_2 \cdot f \cdot \cos(\theta_f - q_2) - b_2 \cdot \dot{u}(t - t').$$

Linearizando:

$$f(q_2, \dot{q}_2) = -b_2 \cdot \dot{q}_2 \cdot f \cdot \cos(\theta_f - q_2).$$

$$f(q_2, \dot{q}_2) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial q_2}(0,0) \cdot (q_2 - 0) + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2}(0,0) \cdot (\dot{q}_2 - 0).$$

$$f(q_2, \dot{q}_2) = b_2 \cdot f \cdot \dot{q}_2 \cdot \cos \theta_f.$$

Assim a primeira equação diferencial do sistema resultante do TMB é:

$$M \cdot \ddot{q}_1 = -K_3 - B_3 - K_2 - B_2$$

Para o calculo do TMA deve-se calcular o momento em relação ao centro de massa do conjunto de todas as forças.

Supondo que q_2 seja pequeno, hipótese valida pois as maiores rotações devem estar entre $-\arctg(u(t)/(l_{12}+l_{22}))$ e $+\arctg(u(t)/(l_{12}+l_{22}))$ pode-se aproximar os braços para as forças como sendo constantes:

$$l = e \cdot \cos(\theta_e + q_2)$$

$$q_2 = 0$$

Braço para as forças do conjunto três:

$$l_{22} = e \cdot \cos(\theta_e)$$

Braço para as forças do conjunto dois:

$$l_{12} = f \cdot \cos(\theta_f)$$

As forças que os conjuntos mola amortecedor estão em maiúsculo (K e B), os braços das forças 2 e 3 são aproximados como constantes, assim as força que o conjunto 3 e 2 mola amortecedor aplicam sobre o sistema são:

$$K_2 = k_2 \cdot (q_1 - l_{12} \cdot \sin[q_2] - u(t - t'))$$

$$B_2 = b_2 \cdot (\dot{q}_1 - l_{12} \cdot \cos[q_2] \cdot \dot{q}_2 - \dot{u}(t - t'))$$

$$K_3 = k_3 \cdot (q_1 + l_{22} \cdot \sin[q_2] - u(t))$$

$$B_3 = b_3 \cdot (\dot{q}_1 + l_{22} \cdot \cos[q_2] \cdot \dot{q}_2 - \dot{u}(t))$$

As entradas são representadas por $u(t)$ e $u(t-t')$ o tempo t' representam a diferença entre o degrau e impulso devido a velocidade e distancia entre as rodas. Ambas as forças apresentam termos não lineares devido ao seno do deslocamento angular q_2 . Contudo para ângulos pequenos pode-se considerar que o seno do ângulo confunde-se com o próprio em radianos e no amortecimento o cosseno do ângulo pode ser considerado unitário assim, as equações resultantes podem ser representadas como:

$$[M] \cdot \{\ddot{q}_i\} + [B] \cdot \{\dot{q}_i\} + [K] \cdot \{q\} = [F]$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{12} & 0 \\ 0 & J_{12} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_2 + b_3 & b_3 \cdot l_{22} - b_2 \cdot l_{12} \\ b_3 \cdot l_{22} - b_2 \cdot l_{12} & b_3 \cdot l_{22}^2 + b_2 \cdot l_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_2 + k_3 & k_3 \cdot l_{22} - k_2 \cdot l_{12} \\ k_2 \cdot l_{12} - k_3 \cdot l_{22} & k_3 \cdot l_{22}^2 + k_2 \cdot l_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} k_3 \cdot u(t) + b_3 \cdot \dot{u}(t) + k_2 \cdot u(t - t') + b_2 \cdot \dot{u}(t - t') \\ l_{22} \cdot (k_3 \cdot u(t) + b_3 \cdot \dot{u}(t)) - l_{12} \cdot (k_2 \cdot u(t - t') + b_2 \cdot \dot{u}(t - t')) \end{bmatrix}$$

Onde [M] matriz de inércia do sistema, geralmente diagonal, quando o sistema não possui termos de acelerações de arrastamento, [B] matriz de amortecimento do sistema, [K] matriz de rigidez semelhante a [B] se para cada mola tivermos um amortecedor correspondente e com diagonal principal positiva, indicando que o sistema não explode para um deslocamento inicial qualquer, por fim [F] matriz de forças externas. As observações anteriores são de grande valia para saber se a modelagem matemática esta coerente com o sistema físico.

De pose das equações diferenciais lineares descritas na forma anterior, a representação na forma de espaço de estados fica simplificada, para deixarmos as equações no seguinte formato:

$$\{\dot{x}_i\} = [A] \cdot \{x_i\} + B \cdot \{u\}$$

$$\{y_i\} = [C] \cdot \{x_i\} + [D] \cdot \{u\}$$

A partir das equações diferencias na forma:

$$[M] \cdot \{\ddot{q}_i\} + [B] \cdot \{\dot{q}_i\} + [K] \cdot \{q\} = [F] \cdot \{u\}$$

De maneira simplificada primeiramente devemos inverte a matriz M e isolarmos o vetor aceleração de um lado da equação, resultando em:

$$\{\ddot{q}_i\} = [M]^{-1} \cdot [B] \cdot \{\dot{q}_i\} + [M]^{-1} \cdot [K] \cdot \{q\} + [M]^{-1} \cdot [F] \cdot \{u\}$$

Fazendo a transformação anterior já é possível a simulação do sistema em simulink matlab ou scicos scilab utilizando diagrama de blocos (nas próximas

sessões esse trabalho é ilustrado), continuando para criarmos o algoritmo de simulação.

A matriz $[A]$ e $[B]$ do espaço de estados pode ser obtida fazendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}.K & -M^{-1}.B \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}.F \end{bmatrix}$$

Os vetores $x(t)$ e $x'(t)$ são obtidos fazendo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{bmatrix}$$

O tamanho desses vetores geralmente para sistemas mecânicos onde as leis governantes são as de Newton devem ser o dobro do numero de graus de liberdade e o tamanho da matriz A e B devem ser quadradas de mesma ordem.

Note que com essas transformações o sistema de equações diferenciais que era de segunda ordem passa a ser de primeira ordem (apenas com derivadas a primeira), todo esse trabalho algébrico justifica-se para o trabalho com algoritmos de simulação e com formatos de representação já consolidadas na literatura de modelagem de sistemas e controle.

7.1.3 Funções de transferência modelo com 2 graus de liberdade.

Aplicando a transformada de Laplace para as equações em espaço de estados tem-se:

Deslocamento vertical do centro de massa em função do deslocamento da roda dianteira.

$$\frac{Q_1}{U_1} = \frac{11082641 + 22496.107s + 1604.7904s^2 - 4.263 \times 10^{-14}s^3}{23017793 + 93445.369s + 10485.847s^2 + 21.092193s^3 + s^4}$$

Deslocamento vertical do centro de massa em função da velocidade da roda dianteira.

$$\frac{Q_1}{U_2} = \frac{21312771 + 43261.745s + 6886.299s^2 - 7.105 \times 10^{-15}s^3}{23017793 + 93445.369s + 10485.847s^2 + 21.092193s^3 + s^4}$$

Deslocamento vertical do centro de massa em função do deslocamento da roda traseira.

$$\frac{Q_1}{U_3} = \frac{11935152 + 24226.577s + 1604.7904s^2 - 4.974 \times 10^{-14}s^3}{23017793 + 93445.369s + 10485.847s^2 + 21.092193s^3 + s^4}$$

Deslocamento vertical do centro de massa em função da velocidade da roda traseira.

$$\frac{Q_1}{U_4} = \frac{-21312771 - 43261.745s - 6394.4205s^2 + 3.197 \times 10^{-14}s^3}{23017793 + 93445.369s + 10485.847s^2 + 21.092193s^3 + s^4}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função do deslocamento da roda dianteira.

$$\frac{Q_2}{U_1} = \frac{22496.107 + 45.66374s + 3.257485s^2 - 1.066 \times 10^{-14}s^3}{23017793 + 93445.369s + 10485.847s^2 + 21.092193s^3 + s^4}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função da velocidade da roda dianteira.

$$\frac{Q_2}{U_2} = \frac{43261.745 + 87.814885s + 13.978159s^2 - 1.776 \times 10^{-14}s^3}{23017793 + 93445.369s + 10485.847s^2 + 21.092193s^3 + s^4}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função do deslocamento da roda traseira.

$$\frac{Q_2}{U_3} = \frac{24226.577 + 49.176336s + 3.257485s^2 - 1.421 \times 10^{-14}s^3}{23017793 + 93445.369s + 10485.847s^2 + 21.092193s^3 + s^4}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função da velocidade da roda traseira.

$$\frac{Q_2}{U_4} = \frac{-43261.745 - 87.814885s - 12.979719s^2}{23017793 + 93445.369s + 10485.847s^2 + 21.092193s^3 + s^4}$$

Com as funções de transferências obtidas também é possível a simulação numérica do sistema, observe que pelo fato do sistema possuir 4 variáveis de entrada e duas variáveis de saída, o número de funções é o produto, ou seja 8.

7.2 Modelo com três graus de liberdade

7.2.1 Modelo físico

O modelo com três graus de liberdade (figura 6) nada mais é do que uma evolução do modelo anterior, onde é acrescentada a massa suspensa da roda dianteira e um amortecimento do garfo, representado pela mola e amortecedor

k_6 e b_6 , a notação aqui utilizada ficara mais clara com o decorrer do texto. Além disso o centro de massa da parte do sistema de maior massa desloca-se para esquerda e seu momento de inércia se reduz.

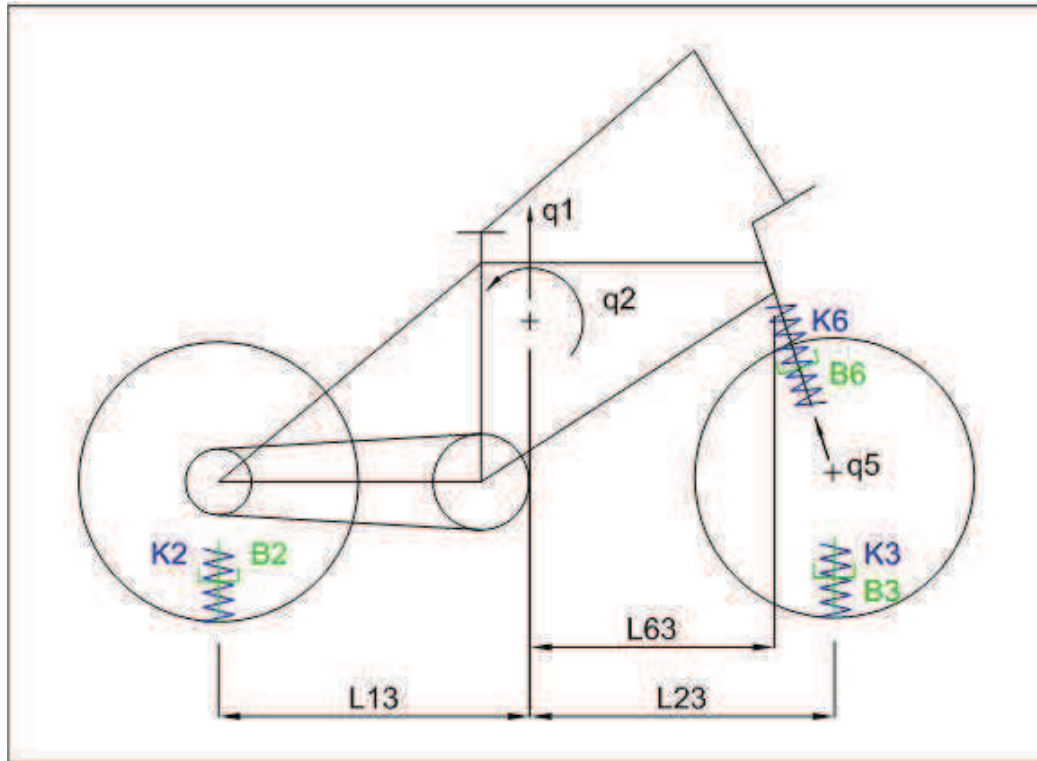


Figura 6: Modelo físico com três graus de liberdade

7.2.2 Modelo matemático

Aplicando o mesmo equacionamento já com as forças linearizadas, o TMB para o conjunto maior fica:

$$M_{13} \cdot \ddot{q}_1 = (K_6 + B_6) \cdot \cos[\gamma] + K_2 + B_2$$

$$K_2 = -k_2 \cdot (q_1 - l_{13} \cdot \sin[q_2] - u(t - t'))$$

$$B_2 = -b_2 \cdot (\dot{q}_1 - l_{13} \cdot \cos[q_2] \cdot \dot{q}_2 - \dot{u}(t - t'))$$

Onde as forças, já linearizadas, que o conjunto seis exerce sobre sistema são:

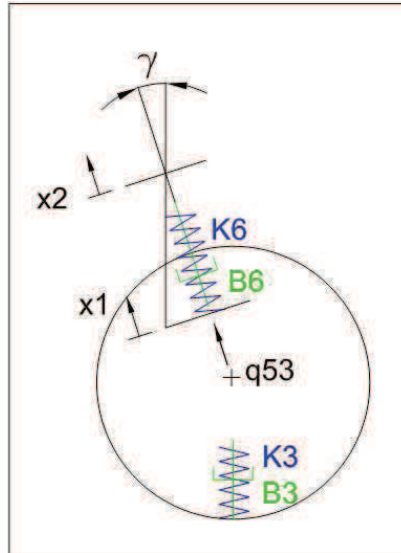


Figura 7: Mola inclinada

$$x_1 = q_5$$

$$x_2 = q_1 + l_{63} \cdot \sin[q_2] \cdot \cos[\gamma]$$

$$K_6 = -k_6 \cdot (q_1 + l_{63} \cdot \sin[q_2] \cdot \cos[\gamma] - q_5)$$

$$B_6 = -b_6 \cdot (\dot{q}_1 + l_{63} \cdot \cos[q_2] \cdot \dot{q}_2 \cdot \cos[\gamma] - \dot{q}_5)$$

O TMA para o conjunto maior fica:

$$J_{13} \cdot \ddot{q}_2 = l_{63} \cdot \cos[\gamma] \cdot (K_6 + B_6) - l_{13} \cdot (K_2 + B_2)$$

Para a massa suspensa da roda dianteira tem-se:

$$m_{33} \cdot \ddot{q}_5 = \cos[\gamma] \cdot (-K_6 - B_6) + K_3 + B_3$$

$$K_3 = -k_3 \cdot (q_5 - \frac{u(t)}{\cos[\gamma]})$$

$$B_3 = -b_3 \cdot (\dot{q}_5 - \frac{\dot{u}(t)}{\cos[\gamma]})$$

As forças linearizadas representada em equações matriciais ficam:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{13} & 0 & 0 \\ 0 & J_{13} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_2 + b_6 \cdot \cos [\gamma] & b_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] - b_2 \cdot l_{13} & b_6 \cdot \cos [\gamma] \\ b_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] - b_2 \cdot l_{13} & b_6 \cdot l_{63}^2 \cdot \cos [\gamma] + b_2 \cdot l_{13}^2 & -b_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] \\ b_6 \cdot \cos [\gamma] & -b_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] & b_3 + b_6 \cdot \cos [\gamma] \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_2 + k_6 \cdot \cos [\gamma] & k_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] - k_2 \cdot l_{13} & k_6 \cdot \cos [\gamma] \\ k_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] - k_2 \cdot l_{13} & k_6 \cdot l_{63}^2 \cdot \cos [\gamma] + k_2 \cdot l_{13}^2 & -k_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] \\ k_6 \cdot \cos [\gamma] & -k_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] & k_3 + k_6 \cdot \cos [\gamma] \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} k_2 \cdot u(t - t') + \frac{b_2}{\cos [\gamma]} \cdot \dot{u}(t - t') \\ l_{13} \cdot k_2 \cdot u(t - t') + l_{13} \cdot b_2 \cdot \dot{u}(t - t') \\ k_3 \cdot u(t) + \frac{b_3}{\cos [\gamma]} \cdot \dot{u}(t) \end{bmatrix}$$

Realizando o mesmo procedimento descrito para o modelo com 2 graus para obtermos as equações em espaço de estados tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_5 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ u(t - t') \\ \dot{u}(t - t') \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_5 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ u(t - t') \\ \dot{u}(t - t') \end{bmatrix}$$

Onde

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{-k_2 - k_6 \cdot \cos [\gamma]}{M_{13}} & \frac{-k_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] + k_2 \cdot l_{13}}{M_{13}} & \frac{-k_6 \cdot \cos [\gamma]}{M_{13}} \\ \frac{-k_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] + k_2 \cdot l_{13}}{J_{13}} & \frac{-k_6 \cdot l_{63}^2 \cdot \cos [\gamma] - k_2 \cdot l_{13}^2}{J_{13}} & \frac{k_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma]}{J_{13}} \\ \frac{-k_6 \cdot \cos [\gamma]}{m_{33}} & \frac{k_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma]}{m_{33}} & \frac{-k_3 - k_6 \cdot \cos [\gamma]}{m_{33}} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-b_2 - b_6 \cdot \cos [\gamma]}{M_{13}} & \frac{-b_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] + b_2 \cdot l_{13}}{M_{13}} & \frac{-b_6 \cdot \cos [\gamma]}{M_{13}} \\ \frac{-b_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma] + b_2 \cdot l_{13}}{J_{13}} & \frac{-b_6 \cdot l_{63}^2 \cdot \cos [\gamma] - k_2 \cdot l_{13}^2}{J_{13}} & \frac{b_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma]}{J_{13}} \\ \frac{-b_6 \cdot \cos [\gamma]}{m_{33}} & \frac{b_6 \cdot l_{63} \cdot \cos [\gamma]}{m_{33}} & \frac{-b_3 - b_6 \cdot \cos [\gamma]}{m_{33}} \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_2}{M_{13}} & \frac{b_2}{M_{13} \cos [\gamma]} \\ 0 & 0 & \frac{l_{13} \cdot k_2}{J_{13}} & \frac{l_{13} \cdot b_2}{J_{13}} \\ \frac{k_3}{m_{33}} & \frac{b_3}{m_{33} \cos [\gamma]} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2.3 Funções de transferência do modelo com 3 graus de liberdade

Deslocamento vertical do centro de massa em função do deslocamento da roda dianteira.

$$\frac{Q_1}{U_1} = \frac{6.411 \times 10^9 + 8.679 \times 10^8 s + 2811495.5 s^2 + 143499.68 s^3 + 1.310 \times 10^{-10} s^4 + 3.979 \times 10^{-13} s^5}{1.201 \times 10^{10} + 1.651 \times 10^9 s + 2.950 \times 10^8 s^2 + 1964978.7 s^3 + 66592.11 s^4 + 221.07671 s^5 + s^6}$$

Deslocamento vertical do centro de massa em função da velocidade da roda dianteira.

$$\frac{Q_1}{U_2} = \frac{13014359 + 1761665.1 s + 5706.9162 s^2 + 291.28293 s^3 + 1.601 \times 10^{-10} s^4 + 2.274 \times 10^{-13} s^5}{1.201 \times 10^{10} + 1.651 \times 10^9 s + 2.950 \times 10^8 s^2 + 1964978.7 s^3 + 66592.11 s^4 + 221.07671 s^5 + s^6}$$

Deslocamento vertical do centro de massa em função do deslocamento da roda traseira.

$$\frac{Q_1}{U_3} = \frac{5.536 \times 10^9 + 7.493 \times 10^8 s + 98814302 s^2 + 351328.28 s^3 + 1650.2463 s^4 - 1.137 \times 10^{-13} s^5}{1.201 \times 10^{10} + 1.651 \times 10^9 s + 2.950 \times 10^8 s^2 + 1964978.7 s^3 + 66592.11 s^4 + 221.07671 s^5 + s^6}$$

Deslocamento vertical do centro de massa em função da velocidade da roda traseira.

$$\frac{Q_1}{U_4} = \frac{11236888 + 1521060.9s + 200578.28s^2 + 713.14398s^3 + 3.3497537s^4 - 2.558x10^{-13}s^5}{1.201x10^{10} + 1.651x10^9s + 2.950x10^8s^2 + 1964978.7s^3 + 66592.11s^4 + 221.07671s^5 + s^6}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função do deslocamento da roda dianteira.

$$\frac{Q_2}{U_1} = \frac{1.258x10^{-10} + 1.703x10^9s + 6911334.8s^2 + 471011.16s^3 + 2.037x10^{-10}s^4 + 3.411x10^{-13}s^5}{1.201x10^{10} + 1.651x10^9s + 2.950x10^8s^2 + 1964978.7s^3 + 66592.11s^4 + 221.07671s^5 + s^6}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função da velocidade da roda dianteira.

$$\frac{Q_2}{U_2} = \frac{25535371 + 3456153.8s + 14028.978s^2 + 956.08236s^3 + 1.892x10^{-10}s^4 + 3.979x10^{-13}s^5}{1.201x10^{10} + 1.651x10^9s + 2.950x10^8s^2 + 1964978.7s^3 + 66592.11s^4 + 221.07671s^5 + s^6}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função do deslocamento da roda traseira.

$$\frac{Q_2}{U_3} = \frac{-1.272x10^{10} - 1.721x10^9s - 3.733x10^8s^2 - 1316515.6s^3 - 6273.4405s^4 + 1.990x10^{-13}s^5}{1.201x10^{10} + 1.651x10^9s + 2.950x10^8s^2 + 1964978.7s^3 + 66592.11s^4 + 221.07671s^5 + s^6}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função da velocidade da roda traseira.

$$\frac{Q_2}{U_4} = \frac{-25810330 - 3494163.8s - 757688.56s^2 - 2672.3301s^3 - 12.734148s^4 - 1.990x10^{-13}s^5}{1.201x10^{10} + 1.651x10^9s + 2.950x10^8s^2 + 1964978.7s^3 + 66592.11s^4 + 221.07671s^5 + s^6}$$

Deslocamento da roda dianteira em função da velocidade da roda traseira.

$$\frac{Q_3}{U_1} = \frac{1.201x10^{10} + 1.626x10^9s + 2.883x10^8s^2 + 923977.68s^3 + 58260.87s^4 - 1.137x10^{-13}s^5}{1.201x10^{10} + 1.651x10^9s + 2.950x10^8s^2 + 1964978.7s^3 + 66592.11s^4 + 221.07671s^5 + s^6}$$

Deslocamento da roda dianteira em função da velocidade da roda traseira.

$$\frac{Q_3}{U_2} = \frac{24386973 + 3300924.4s + 585149.85s^2 + 1875.5368s^3 + 118.26087s^4 + 2.558x10^{-13}s^5}{1.201x10^{10} + 1.651x10^9s + 2.950x10^8s^2 + 1964978.7s^3 + 66592.11s^4 + 221.07671s^5 + s^6}$$

Deslocamento da roda dianteira em função da velocidade da roda traseira.

$$\frac{Q_3}{U_3} = \frac{24386973 + 3300924.4s + 585149.85s^2 + 1875.5368s^3 + 118.26087s^4 + 2.558x10^{-13}s^5}{1.201x10^{10} + 1.651x10^9s + 2.950x10^8s^2 + 1964978.7s^3 + 66592.11s^4 + 221.07671s^5 + s^6}$$

Deslocamento da roda dianteira em função da velocidade da roda traseira.

$$\begin{aligned} \frac{Q_3}{U_4} &= \frac{-1324.6219 - 353.2324s - 1493.0736s^2 - 195.93664s^3 + 8.731x10^{-11}s^4 + 8.527x10^{-14}s^5}{1.201x10^{10} + 1.651x10^9s + 2.950x10^8s^2 + 1964978.7s^3 + 66592.11s^4 + 221.07671s^5 + s^6} \end{aligned}$$

Agora o numero de funções de transferência é 12, 4 variáveis de entrada e 3 de saída.

7.3 Modelo com quatro e cinco graus de liberdade

7.3.1 Modelo físico

O sistema com quatro graus de liberdade é representado na figura 8, onde o sistema é dividido em dois (ciclista e bicicleta) e adicionando mais dois conjuntos mola amortecedor representado na figura como o amortecimento do braço do ciclista 5 e o amortecimento entre o ciclista e o banco 4 (modelo de He), esse modelo seria uma evolução do modelo com 2 graus de liberdade, por consequencia pode-se inferir conclusões a cerca da influencia do ciclista sobre os modelos. Assim o modelo matemático ganha mais duas equações diferenciais representadas pelo movimento linear da massa do ciclista q_4 e pelo movimento angular do ciclista em relação à articulação no selim q_3 .

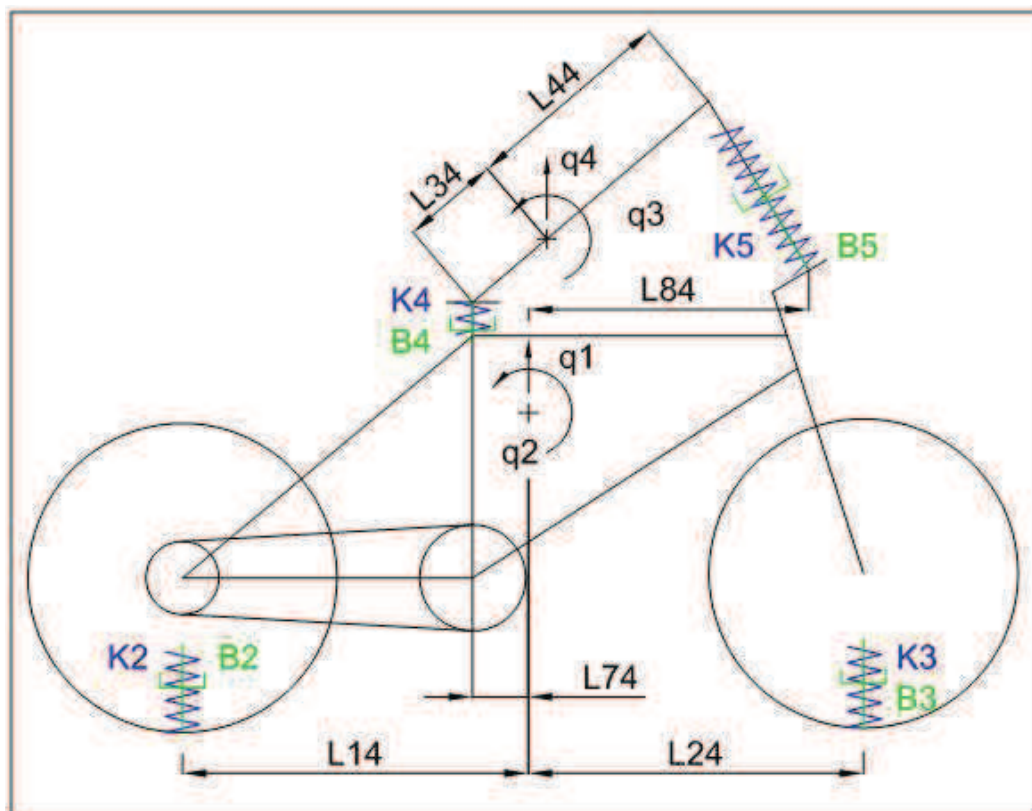


Figura 8: Modelo físico com quatro graus de liberdade

7.3.2 Modelo matemático

Esse modelo apresenta uma evolução considerável para avaliar os esforços sobre o ciclista, o modelo matemático linear pode ser obtido pelas equações de Lagrange, para tal foi necessário o trabalho com as energias cinéticas, potências

e dissipativas do sistema, a energia potencial gravitacional foi desconsiderada, pois se trata do movimento do sistema em torno da posição de equilíbrio, o mesmo método foi adotado nos modelos 2 e 3, nesse instante cabe ressaltar que o modelo de cinco graus de liberdade, analogamente ao 3, pode ser obtido substituindo a força do conjunto 3 pelo conjunto 6 e adicionando a equação diferencial referente a massa m33 coordenada generalizada q5.

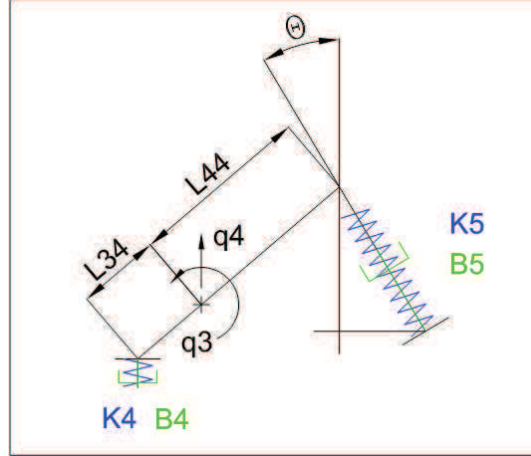


Figura 9: Modelo do ciclista

- Energia cinética.

$$T = \frac{m_{14} \cdot \dot{q}_1^2}{2} + \frac{j_{14} \cdot \dot{q}_2^2}{2} + \frac{J_{14} \cdot \dot{q}_3^2}{2} + \frac{M_{14} \cdot \dot{q}_4^2}{2}$$

Os o momento de inércia j14 e a massa m14 representam as inércias da bicicleta, enquanto que os índices maiúsculos representam o ciclista.

- Energia potencial das molas.

$$V = \frac{k_5 \cdot ((l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3] + q_4 - q_1 - l_{84} \cdot \sin[q_2])^2}{2} + \frac{k_4 \cdot ((l_{34} + l_{44}) \sin[q_3] - q_4 - q_1 + l_{84} \cdot \sin[q_2])^2}{2} + \frac{k_3 \cdot (q_1 + l_{24} \cdot \sin[q_2] - u(t))^2}{2} + \frac{k_2 \cdot (q_1 - l_{14} \cdot \sin[q_2] - u(t - t'))^2}{2}$$

- Energia dissipativa dos amortecedores

$$\begin{aligned}
D = & \frac{b_5 \cdot (\dot{q}_4 + (l_{44} + l_{34}) \cdot \sin[\dot{q}_3] - \dot{q}_1 - l_{84} \cdot \sin[\dot{q}_2])^2}{2} \\
& + \frac{b_4 \cdot (\dot{q}_4 - (l_{44} + l_{34}) \cdot \sin[\dot{q}_3] - \dot{q}_1 + l_{84} \cdot \sin[\dot{q}_2])^2}{2} \\
& + \frac{b_3 \cdot (\dot{q}_1 + l_{24} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t))^2}{2} \\
& + \frac{b_2 \cdot (\dot{q}_1 - l_{14} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t - t'))^2}{2}
\end{aligned}$$

As equações diferenciais são obtidas fazendo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

$$m_{14} \cdot \ddot{q}_1$$

$$\begin{aligned}
& + k_2 \cdot (q_1 - l_{14} \cdot \sin[q_2] \\
& - u(t - t')) + k_3 \cdot (q_1 \\
& + l_{24} \cdot \sin[q_2] - u(t)) - k_4 \cdot (q_4 - (l_{44} + l_{34}) \cdot \sin[q_3] - q_1 \\
& + l_{74} \cdot \sin[q_2]) - k_5 \cdot (q_4 + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3] - q_1 \\
& - l_{84} \cdot \sin[q_2]) - b_4 \cdot (l_{74} \cdot \sin[\dot{q}_2] - (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3] - \dot{q}_1 \\
& + \dot{q}_4) - b_5 \cdot (-l_{84} \cdot \sin[\dot{q}_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3] - \dot{q}_1 + \dot{q}_4) \\
& + b_2 \cdot (\dot{q}_1 - l_{14} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t - t')) + b_3 \cdot (\dot{q}_1 + l_{24} \cdot \sin[\dot{q}_2] \\
& - \dot{u}(t)) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{14} \cdot \ddot{q}_2 = & k_2 \cdot l_{14} \cdot \cos[q_2] \cdot (q_1 - l_{14} \cdot \sin[q_2] - u(t - t')) \\
& + k_3 \cdot l_{24} \cdot \cos[q_2] \cdot (q_1 + l_{24} \cdot \sin[q_2] - u(t)) \\
& + k_4 \cdot l_{74} \cdot \cos[q_2] \cdot (-q_1 + q_4 + l_{74} \cdot \sin[q_2] - (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3]) \\
& - k_5 \cdot l_{84} \cdot \cos[q_2] \cdot (-q_1 + q_4 - l_{84} \cdot \sin[q_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3]) \\
& - b_2 \cdot l_{14} \cdot \cos[\dot{q}_2] \cdot (\dot{q}_1 - l_{14} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t - t')) \\
& + b_3 \cdot l_{24} \cdot \cos[\dot{q}_2] \cdot (\dot{q}_1 + l_{24} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t)) \\
& + b_4 \cdot l_{74} \cdot \cos[\dot{q}_2] \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 + l_{74} \cdot \sin[\dot{q}_2] - (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3]) \\
& - b_5 \cdot l_{84} \cdot \cos[\dot{q}_2] \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 - l_{84} \cdot \sin[\dot{q}_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3]) \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{14} \cdot \ddot{q}_3 - k_4 \cdot (l_{34} + l_{44}) \cdot \cos[q_3] \cdot (-q_1 + q_4 + l_{84} \cdot \sin[q_2] - (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3]) \\
+ k_5 \cdot (l_{34} + l_{44}) \cdot \cos[q_3] \cdot (-q_1 + q_4 - l_{84} \cdot \sin[q_2] \\
+ (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3]) \\
- b_4 \cdot (l_{34} + l_{44}) \cdot \cos[\dot{q}_3] \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 + l_{74} \cdot \sin[\dot{q}_2] \\
- (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3]) \\
+ b_5 \cdot (l_{34} + l_{44}) \cdot \cos[\dot{q}_3] \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 - l_{74} \cdot \sin[\dot{q}_2] \\
+ (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3]) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{14} \cdot \ddot{q}_4 + k_4 \cdot (-q_1 + q_4 + l_{74} \cdot \sin[q_2] - (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3]) \\
+ k_5 \cdot (-q_1 + q_4 - l_{84} \cdot \sin[q_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3]) \\
+ b_4 \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 + l_{74} \cdot \sin[\dot{q}_2] - (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3]) \\
+ b_5 \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 - l_{84} \cdot \sin[\dot{q}_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3]) = 0
\end{aligned}$$

As equações finais são acopladas e não lineares, para simular foi necessária sua linearização em torno do ponto de equilíbrio estático do sistema. Linearização:

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 = [k_4 \cdot (q_4 - l_{34} \cdot q_3 - q_1 + l_{64} \cdot q_2) \\
+ b_4 \cdot (\dot{q}_4 - l_{34} \cdot \dot{q}_3 - \dot{q}_1 + l_{64} \cdot \dot{q}_2) \\
+ k_5 \cdot (q_4 - l_{44} \cdot q_3 - q_1 - l_{64} \cdot q_2) \\
+ b_5 \cdot (\dot{q}_4 - l_{44} \cdot \dot{q}_3 - \dot{q}_1 - l_{64} \cdot \dot{q}_2) \\
- k_2 \cdot (q_1 - l_{14} \cdot q_2 - u(t - t')) \\
- b_2 \cdot (\dot{q}_1 - l_{14} \cdot \dot{q}_2 - \dot{u}(t - t')) \\
- k_3 \cdot (q_1 + l_{24} \cdot q_2 - u(t)) \\
- b_3 \cdot (\dot{q}_1 + l_{24} \cdot \dot{q}_2 - \dot{u}(t))] / m_{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_2 = [-k_4 \cdot l_{54} \cdot (q_4 - l_{34} \cdot q_3 - q_1 + l_{64} \cdot q_2) \\
- b_4 \cdot l_{54} \cdot (\dot{q}_4 - l_{34} \cdot \dot{q}_3 - \dot{q}_1 + l_{64} \cdot \dot{q}_2) \\
+ k_5 \cdot l_{64} \cdot (q_4 + l_{44} \cdot q_3 - q_1 - l_{64} \cdot q_2) \\
+ b_5 \cdot l_{64} \cdot (\dot{q}_4 + l_{44} \cdot \dot{q}_3 - \dot{q}_1 - l_{64} \cdot \dot{q}_2) \\
+ k_2 \cdot l_{14} \cdot (q_1 - l_{14} \cdot q_2 - u(t - t')) \\
+ b_2 \cdot l_{14} \cdot (\dot{q}_1 - l_{14} \cdot \dot{q}_2 - \dot{u}(t - t')) \\
- k_3 \cdot l_{24} \cdot (q_1 + l_{24} \cdot q_2 - u(t))
\end{aligned}$$

$$-b_3 * l_{24} * (\dot{q}_1 + l_{24} * \dot{q}_2 - \dot{u}(t))]/j_{14}$$

$$\ddot{q}_3 = [-k_4 * (-l_{34}) * (q_4 - l_{34} * q_3 - q_1 + l_{64} * q_2)$$

$$-b_4 * (-l_{34}) * (\dot{q}_4 - l_{34} * \dot{q}_3 - \dot{q}_1 + l_{64} * \dot{q}_2)$$

$$-k_5 * l_{44} * (q_4 - l_{44} * q_3 - q_1 + l_{64} * q_2)$$

$$-b_5 * l_{44} * (\dot{q}_4 - l_{44} * \dot{q}_3 - \dot{q}_1 + l_{64} * \dot{q}_2)]/J_{14}$$

$$\ddot{q}_4 = [-k_4 * (q_4 - l_{34} * q_3 - q_1 + l_{64} * q_2)$$

$$-b_4 * (\dot{q}_4 - l_{34} * \dot{q}_3 - \dot{q}_1 + l_{64} * \dot{q}_2)$$

$$-k_5 * (q_4 + l_{44} * q_3 - q_1 - l_{64} * q_2)$$

$$-b_5 * (\dot{q}_4 + l_{44} * \dot{q}_3 - \dot{q}_1 - l_{64} * \dot{q}_2)]/M_{14}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} *$$

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ u(t-t') \\ \dot{u}(t-t') \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ u(t-t') \\ \dot{u}(t-t') \end{bmatrix}$$

7.3.3 Funções de transferência modelo de 4 graus liberdade

Deslocamento vertical do centro de massa do quadro da bicicleta em função do deslocamento da roda dianteira.

$$\frac{Q_1}{U_1} = \frac{1.439 \times 10^{10} + 5.109 \times 10^8 s + 51021978 s^2 + 944827.34 s^3 + 37788.374 s^4 + 146.05162 s^5 + s^6 - 2.274 \times 10^{-13} s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13} s + 1.783 \times 10^{12} s^2 + 3.811 \times 10^{10} s^3 + 1.603 \times 10^9 s^4 + 13751880 s^5 + 101836.81 s^6 + 351.46339 s^7 + s^8}$$

Deslocamento vertical do centro de massa do quadro da bicicleta em função da velocidade da roda dianteira.

$$\frac{Q_1}{U_2} = \frac{-7.75 \times 10^8 - 36107162 s - 1317650.9 s^2 - 23759.451 s^3 + 1416.8186 s^4 + 40.049412 s^5 - 2.91 \times 10^{-11} s^6 - 4.547 \times 10^{-13} s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13} s + 1.783 \times 10^{12} s^2 + 3.811 \times 10^{10} s^3 + 1.603 \times 10^9 s^4 + 13751880 s^5 + 101836.81 s^6 + 351.46339 s^7 + s^8}$$

Deslocamento vertical do centro de massa do quadro da bicicleta em função do deslocamento da roda traseira.

$$\frac{Q_1}{U_3} = \frac{-3.709^9 - 1.981^8 s - 12172345 s^2 - 376608.38 s^3 + 336.07502 s^4 - 15.152941 s^5 - 1.601 \times 10^{-10} s^6 - 9.663 \times 10^{-13} s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13} s + 1.783 \times 10^{12} s^2 + 3.811 \times 10^{10} s^3 + 1.603 \times 10^9 s^4 + 13751880 s^5 + 101836.81 s^6 + 351.46339 s^7 + s^8}$$

Deslocamento vertical do centro de massa do quadro da bicicleta em função da velocidade da roda traseira

$$\frac{Q_1}{U_4} = \frac{1.281^{11} + 4.555^9 s + 2.993^8 s^2 + 5760740.8 s^3 + 23128.287 s^4 + 141.41176 s^5 - 2.842 \times 10^{-13} s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13} s + 1.783 \times 10^{12} s^2 + 3.811 \times 10^{10} s^3 + 1.603 \times 10^9 s^4 + 13751880 s^5 + 101836.81 s^6 + 351.46339 s^7 + s^8}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função do deslocamento da roda dianteira

$$\frac{Q_2}{U_1} = \frac{-2.487^8 - 8989643.7 s - 142546.49 s^2 + 4843.3197 s^3 + 1773.3138 s^4 + 63.963317 s^5 - 1.601 \times 10^{-10} s^6 - 1.023 \times 10^{-12} s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13} s + 1.783 \times 10^{12} s^2 + 3.811 \times 10^{10} s^3 + 1.603 \times 10^9 s^4 + 13751880 s^5 + 101836.81 s^6 + 351.46339 s^7 + s^8}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função da velocidade da roda dianteira

$$\frac{Q_2}{U_2} = \frac{1.468^{10} + 5.305^8 s + 54061955 s^2 + 1043932 s^3 + 43290.565 s^4 + 230.4531 s^5 + s^6 - 4.547 \times 10^{-13} s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13} s + 1.783 \times 10^{12} s^2 + 3.811 \times 10^{10} s^3 + 1.603 \times 10^9 s^4 + 13751880 s^5 + 101836.81 s^6 + 351.46339 s^7 + s^8}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função do deslocamento da roda traseira

$$\frac{Q_2}{U_3} = \frac{7.023^{10} + 3.018^9 s + 1.431^8 s^2 + 3144714.8 s^3 + 15757.154 s^4 + 63.642743 s^5 + 1.019 \times 10^{-10} s^6 - 1.137 \times 10^{-13} s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13} s + 1.783 \times 10^{12} s^2 + 3.811 \times 10^{10} s^3 + 1.603 \times 10^9 s^4 + 13751880 s^5 + 101836.81 s^6 + 351.46339 s^7 + s^8}$$

Ângulo de pitch da bicicleta em função da velocidade da roda traseira

$$\frac{Q_2}{U_4} = \frac{-2.414^{10} - 7.510^8 s - 80340868 s^2 - 2305139.9 s^3 - 6651.1895 s^4 - 65.047847 s^5 + 8.731 \times 10^{-11} s^6 - 2.274 \times 10^{-13} s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13} s + 1.783 \times 10^{12} s^2 + 3.811 \times 10^{10} s^3 + 1.603 \times 10^9 s^4 + 13751880 s^5 + 101836.81 s^6 + 351.46339 s^7 + s^8}$$

Ângulo de pitch do ciclista em função do deslocamento da roda dianteira

$$\frac{Q_3}{U_1} = \frac{-2.320^8 - 8005891.4s - 6388481s^2 - 263609.42s^3 - 573.2704s^4 - 8.5866667s^5 + 1.455^{-10}s^6 - 2.274^{-13}s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13}s + 1.783 \times 10^{12}s^2 + 3.811 \times 10^{10}s^3 + 1.603 \times 10^9s^4 + 13751880s^5 + 101836.81s^6 + 351.46339s^7 + s^8}$$

Ângulo de pitch do ciclista em função da velocidade da roda dianteira

$$\frac{Q_3}{U_2} = \frac{1.369^{10} + 4.724^8s + 28111407s^2 + 538644.9s^3 + 2558.2138s^4 + 10.641067s^5 - 5.116^{-13}s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13}s + 1.783 \times 10^{12}s^2 + 3.811 \times 10^{10}s^3 + 1.603 \times 10^9s^4 + 13751880s^5 + 101836.81s^6 + 351.46339s^7 + s^8}$$

Ângulo de pitch do ciclista em função do deslocamento da roda traseira

$$\frac{Q_3}{U_3} = \frac{8.905^{11} + 2.113^{10}s + 1.478^9s^2 + 12873690s^3 + 99011.528s^4 + 342.44872s^5 + s^6 - 6.821^{13}s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13}s + 1.783 \times 10^{12}s^2 + 3.811 \times 10^{10}s^3 + 1.603 \times 10^9s^4 + 13751880s^5 + 101836.81s^6 + 351.46339s^7 + s^8}$$

Ângulo de pitch do ciclista em função da velocidade da roda traseira

$$\frac{Q_3}{U_4} = \frac{1.866^{11} + 8.410^9s + 39383358s^2 + 562571.4s^3 + 1111.2765s^4 + 8.5866667s^5 - 3.411^{-13}s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13}s + 1.783 \times 10^{12}s^2 + 3.811 \times 10^{10}s^3 + 1.603 \times 10^9s^4 + 13751880s^5 + 101836.81s^6 + 351.46339s^7 + s^8}$$

Deslocamento vertical do ciclista em função do deslocamento da roda dianteira

$$\frac{Q_4}{U_1} = \frac{1.448^{10} + 5.141^8s + 33662361s^2 + 639240.27s^3 + 2475.6527s^4 + 16.026667s^5 + 2.037^{-10}s^6}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13}s + 1.783 \times 10^{12}s^2 + 3.811 \times 10^{10}s^3 + 1.603 \times 10^9s^4 + 13751880s^5 + 101836.81s^6 + 351.46339s^7 + s^8}$$

Deslocamento vertical do ciclista em função da velocidade da roda dianteira

$$\frac{Q_4}{U_2} = \frac{-6.392^9 - 2.256^8s - 15366777s^2 - 296027.42s^3 - 1181.9331s^4 - 6.8914667s^5 - 2.842^{-13}s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13}s + 1.783 \times 10^{12}s^2 + 3.811 \times 10^{10}s^3 + 1.603 \times 10^9s^4 + 13751880s^5 + 101836.81s^6 + 351.46339s^7 + s^8}$$

Deslocamento vertical do ciclista em função do deslocamento da roda traseira

$$\frac{Q_4}{U_3} = \frac{1.125^{10} + 5.263^8s - 7461446s^2 + 45311.241s^3 - 77.900847s^4 + 1.7173333s^5 - 1.455^{-10}s^6 - 9.095^{-13}s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13}s + 1.783 \times 10^{12}s^2 + 3.811 \times 10^{10}s^3 + 1.603 \times 10^9s^4 + 13751880s^5 + 101836.81s^6 + 351.46339s^7 + s^8}$$

Deslocamento vertical do ciclista em função da velocidade da roda traseira

$$\frac{Q_4}{U_4} = \frac{6.829^{11} + 1.546^{10}s + 1.451^9s^2 + 12453851s^3 + 98342.926s^4 + 335.43672s^5 + s^6 - 9.663^{-13}s^7}{4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13}s + 1.783 \times 10^{12}s^2 + 3.811 \times 10^{10}s^3 + 1.603 \times 10^9s^4 + 13751880s^5 + 101836.81s^6 + 351.46339s^7 + s^8}$$

7.3.4 Modelo físico cinco

O modelo com cinco graus de liberdade (figura 10) é obtido adicionando a suspensão dianteira na bicicleta e a massa suspensa da roda dianteira. Essa mesma passagem foi realizada do modelo dois para três.

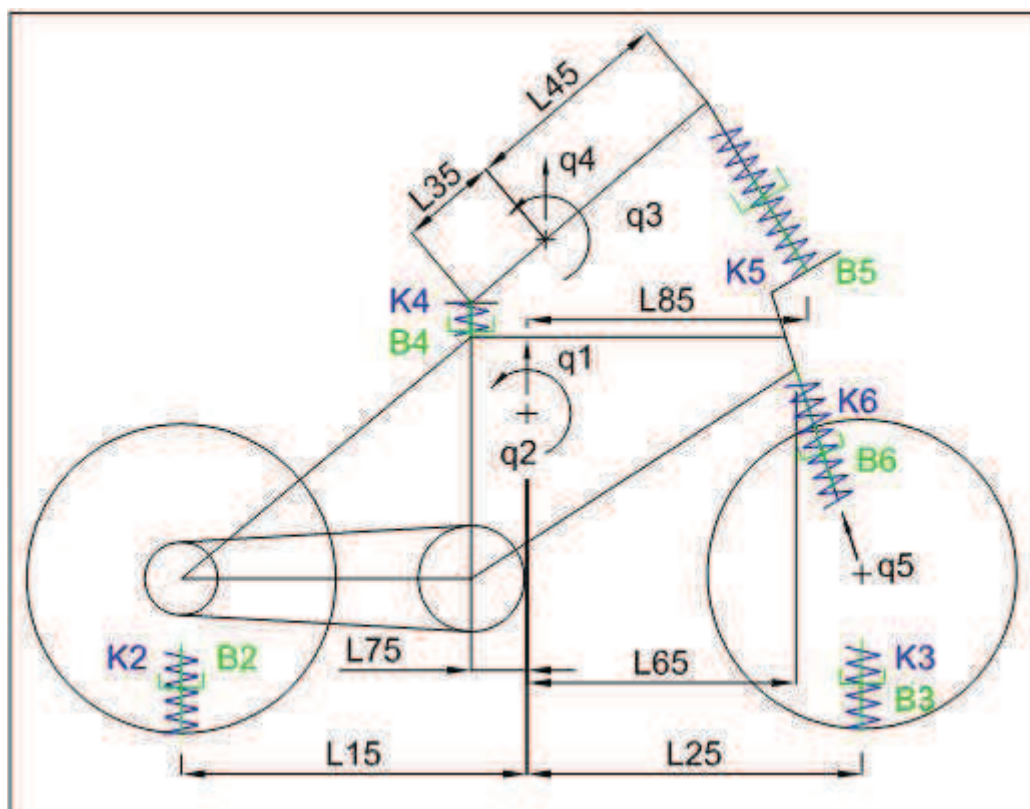


Figura 10: Modelo físico com cinco graus de liberdade

7.3.5 Modelo matemático cinco

Para obter as equações diferenciais do modelo 5 substitui-se as forças K3 e B3 do modelo com 4 graus pelas forças K6 e B6 nas equações referentes às coordenadas generalizadas q_1 e q_2 , e adiciona-se mais uma equação referente à massa da roda dianteira de coordenada generalizada q_5 , como base nas figuras 7 e 12 tem-se:

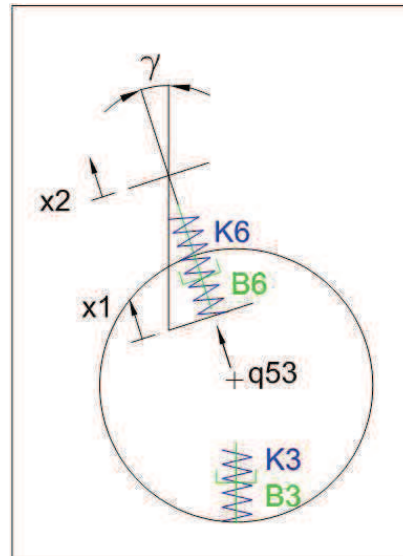


Figura 11 – Modelo físico da roda dianteira.

$$x_1 = q_5$$

$$x_2 = q_1 - l_{63} \cdot \sin[q_2] \cdot q_2$$

$$K_6 = -k_6 \cdot (q_1 + l_{63} \cdot \sin[q_2] \cdot q_2 - q_5)$$

$$B_6 = -b_6 \cdot (\dot{q}_1 + l_{63} \cdot \cos[q_2] \cdot \dot{q}_2 - \dot{q}_5)$$

$$m_{33} \cdot \ddot{q}_5 = \cos[\gamma] \cdot (-K_6 - B_6) + K_3 + B_3$$

$$K_3 = k_3 \cdot (q_5 - u(t))$$

$$B_3 = b_3 \cdot (\dot{q}_5 - \dot{u}(t))$$

As equações finais são disponibilizadas nos programas desenvolvidos via matlab.

7.4 Modelo com seis graus de liberdade

Com o intuito de saber quais as geometrias mais utilizadas pelos fabricantes de bicicletas do mundo foram realizadas pesquisas via internet consultando algumas das maiores fabricantes do Brasil e dos EUA (as principais produtoras de bicicleta de alto desempenho).

As principais fabricantes do Brasil são Caloi [8], sundow [9] e houston [10] e as duas grandes norte americanas são Trek [11] e GT [12], elas possuem geometrias semelhantes as nacionais mas se diferenciam pelos materiais envolvidos e as formas de fabricação, os quadros são apresentados nas figuras 12 a 16 de maneira esquemática.

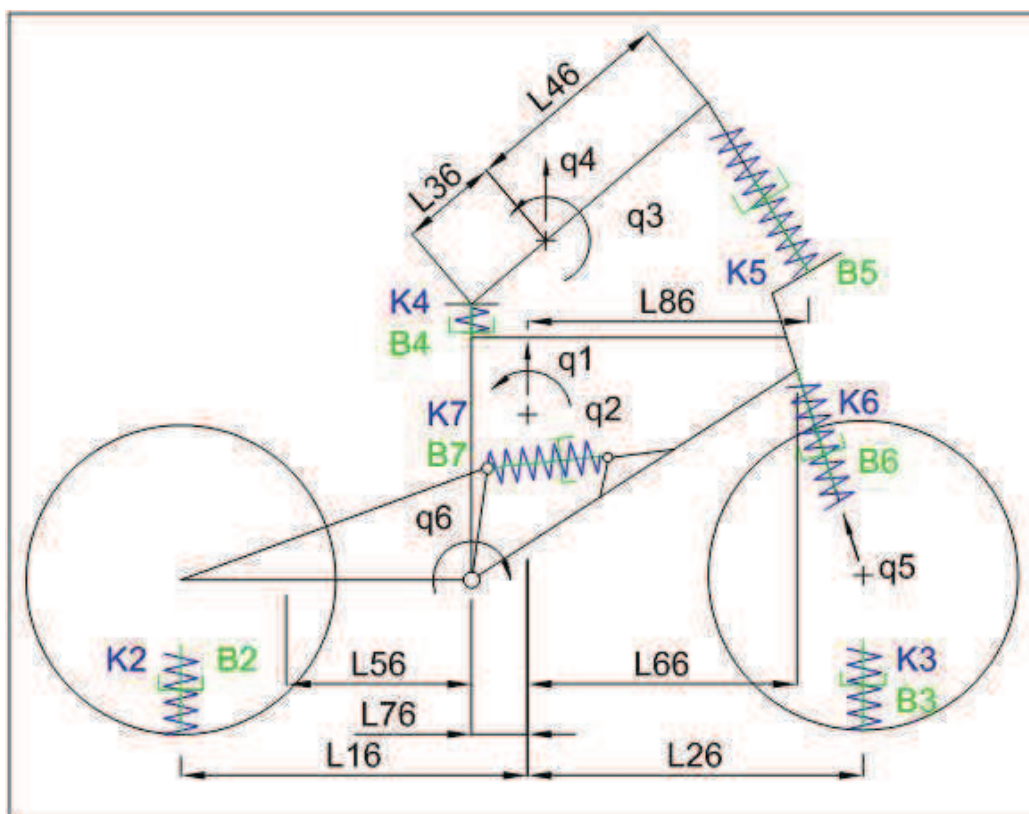


Figura 12: Modelo físico com seis graus de liberdade

As geometrias encontradas são semelhantes pelo fato de basicamente apresentarem duas partes distintas, o quadro central onde tem-se 4 conjuntos de mola e amortecedor (4 a 7) e conjunto dianteiro e traseiro com amortecimento 3 e 2, respectivamente, pode-se notar que os quadros diferem apenas pelo arranjo da suspensão, a posição em que ela é colocada, com ângulo maior ou igual a zero em relação ao chão (geometria 3), menor que zero (geometria 1) ou ainda através de um mecanismo como em 2, 3 e 5.

A geometria aqui escolhida para simulação foi a geometria 1 , podendo facilmente ser estendida a análise para a geometria 3.

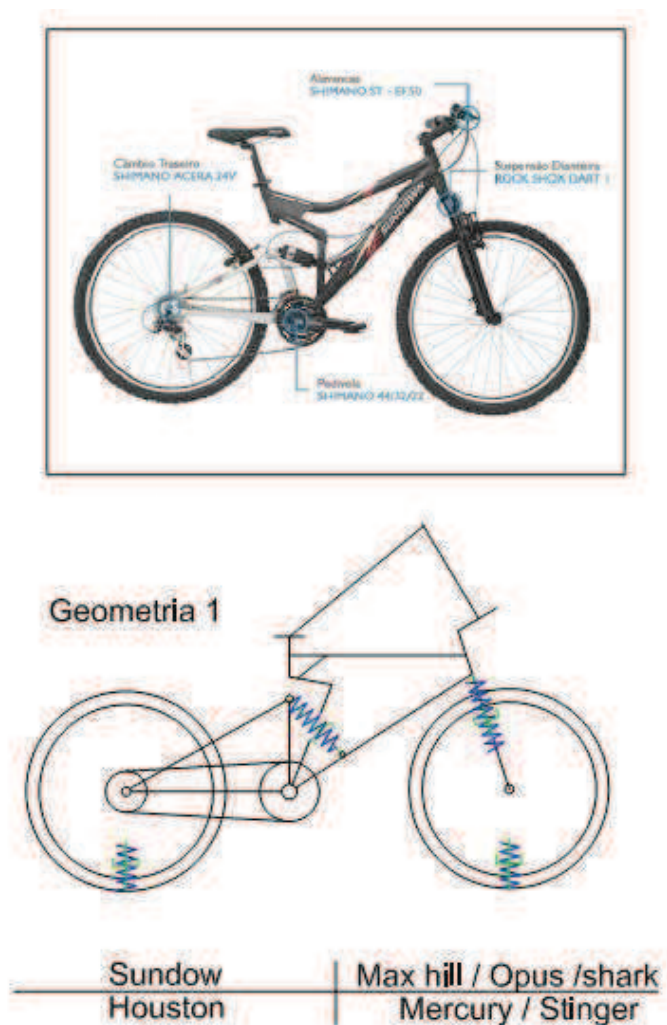


Figura 13: Geometria 1

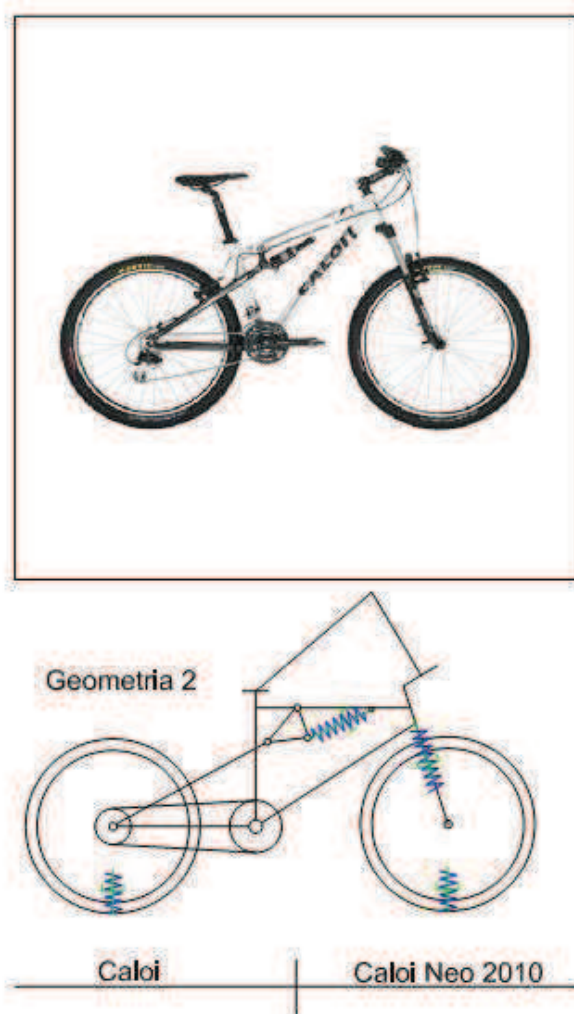


Figura 14: Geometria 2

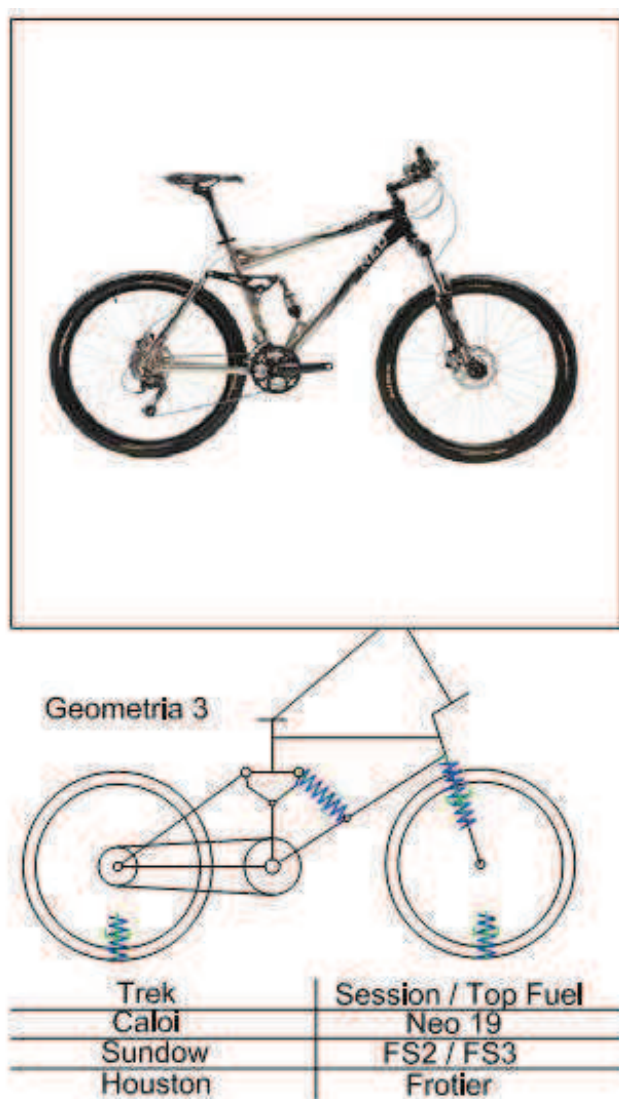


Figura 15: Geometria 3

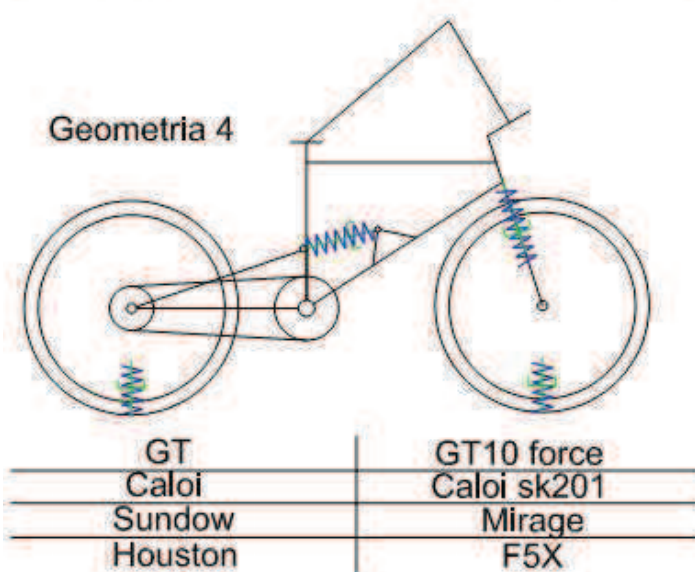


Figura 16: Geometria 4

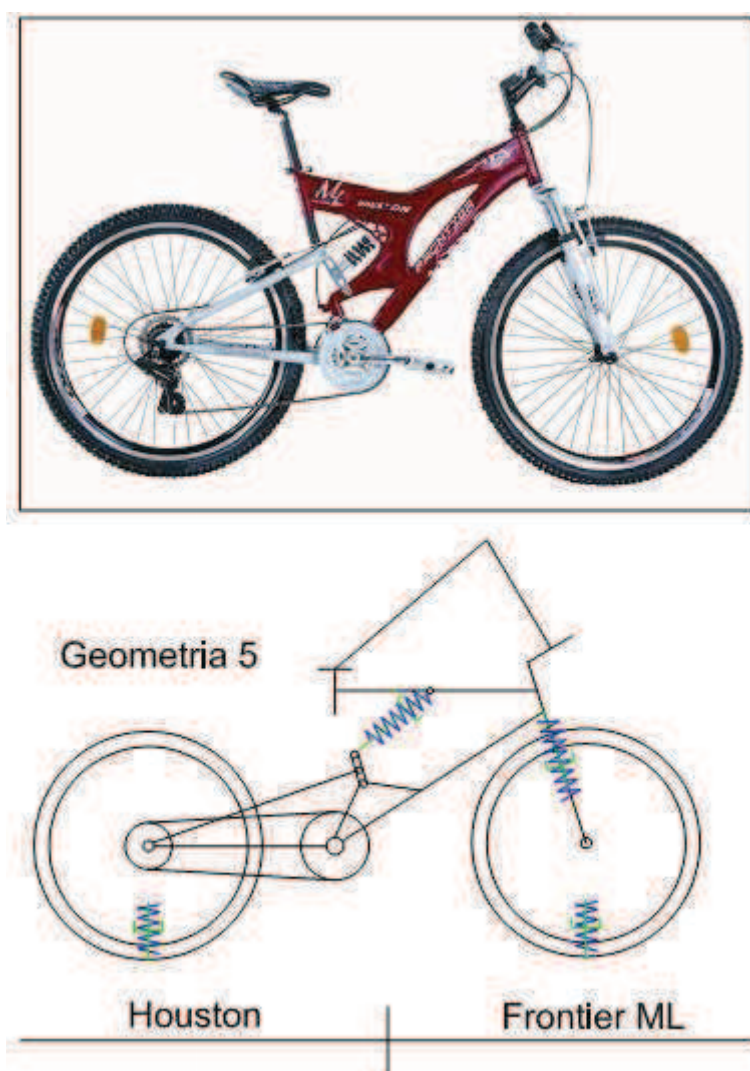


Figura 17: Geometria 5

7.4.1 Modelo matemático

Devido à complexidade matemática em obter as equações diferenciais e erros ao trabalhar com inúmeras variáveis, optou-se pelo método de Lagrange auxiliado pelo programa Wolfram Mathematica para executar as derivadas parciais, assim para o sistema com seis graus de liberdade tem-se:

$$T = \frac{m_{16} \cdot \dot{q}_1^2}{2} + \frac{j_{16} \cdot \dot{q}_2^2}{2} + \frac{J_{16} \cdot \dot{q}_3^2}{2} + \frac{M_{16} \cdot \dot{q}_4^2}{2} + \frac{m_{26} \cdot \dot{q}_5^2}{2} + \frac{m_{36} \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot l_{56} + \dot{q}_6 \cdot l_{76})^2}{2} + \frac{j_{36} \cdot (\dot{q}_2 + \dot{q}_6)^2}{2}$$

Onde o segundo índice representa o modelo e a massa m_3 e momento de inércia j_3 representa a parte de trás articulada da bicicleta, esse termo é responsável por acoplar a matriz de inércia do sistema, quando executamos as derivadas parciais da equação de Lagrange. As energias potenciais e dissipativas são:

$$V = \frac{k_5 \cdot (q_4 + l_{36} \cdot q_3 - q_1 - l_{66} \cdot q_2)^2}{2} + \frac{k_4 \cdot (q_4 + l_{36} \cdot q_3 - q_1 + l_{56} \cdot q_2)^2}{2} + \frac{k_3 \cdot (q_5 - u(t))^2}{2} + \frac{k_2 \cdot (l_{76} \cdot q_6 - u(t - t'))^2}{2} + \frac{k_6 \cdot (q_1 + l_{66} \cdot q_2 - q_5)^2}{2} + \frac{k_7 \cdot (l_{86} \cdot q_6 - q_1 + l_{96} \cdot q_2)^2}{2}$$

$$D = \frac{b_5 \cdot (\dot{q}_4 + l_{36} \cdot \dot{q}_3 - \dot{q}_1 - l_{66} \cdot \dot{q}_2)^2}{2} + \frac{b_4 \cdot (\dot{q}_4 + l_{36} \cdot \dot{q}_3 - \dot{q}_1 + l_{56} \cdot \dot{q}_2)^2}{2} + \frac{b_3 \cdot (\dot{q}_5 - \dot{u}(t))^2}{2} + \frac{b_2 \cdot (l_{76} \cdot \dot{q}_6 - \dot{u}(t - t'))^2}{2} + \frac{b_6 \cdot (\dot{q}_1 + l_{66} \cdot \dot{q}_2 - \dot{q}_5)^2}{2} + \frac{b_7 \cdot (l_{86} \cdot \dot{q}_6 - \dot{q}_1 + l_{96} \cdot \dot{q}_2)^2}{2}$$

As equações diferenciais resultantes podem ser representadas por:

$$[M] \cdot \{\ddot{q}_i\} + [B] \cdot \{\dot{q}_i\} + [K] \cdot \{q\} = [F]$$

Contudo a matriz de inércia M devido à presença da velocidade de arrasto da parte articulada traseira m_{36} e j_{36} , faz com que ela não seja diagonal, o que dificulta a aplicação do sistema em SIMULINK, assim optou-se pelo uso do seguinte artifício algébrico:

$$[M]^{-1} \cdot [M] \cdot \{\ddot{q}_i\} + [M]^{-1} \cdot [B] \cdot \{\dot{q}_i\} + [M]^{-1} \cdot [K] \cdot \{q\} = [M]^{-1} \cdot [F]$$

Multiplicando pela inversa da matriz de inércia o sistema fica:

$$[I].\{\ddot{q}_i\} = -[M]^{-1}.[B].\{\dot{q}_i\} - [M]^{-1}.[K].\{q\} + [M]^{-1}.[F]$$

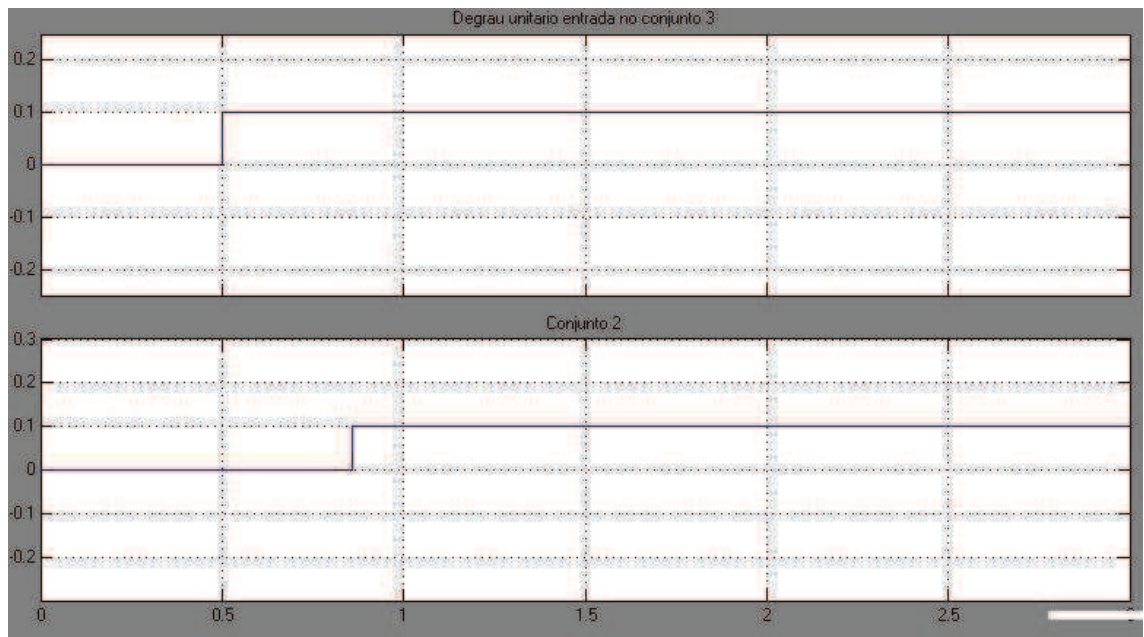
Onde $[I]$ é a matriz diagonal unitária, mais detalhes dessa passagem são descritos no anexo 1, onde as derivadas e equações finais são apresentadas.

8. Simulações dos modelos

Para a completa simulação dos modelos foi necessário o levantamento das constantes físicas e geométricas do sistema, tais podem ser encontradas nas referências e no anexo 2.

8.1 Resposta ao degrau unitário

Como citado anteriormente à entrada degrau é de grande utilidade para analisarmos a resposta transitória do sistema e fisicamente pode representar a subida do ciclista a uma guia entre o asfalto e a calçada já a entrada impulso unitário representa a passagem do ciclista sobre uma pedra. Na figura 7 tem-se a representação gráfica gerada pelo MATLAB, considerou-se que o primeiro degrau está em 0.5 segundos do início do movimento (apenas para facilitar a visualização), já o segundo está defasado de 0.36 segundos, porque a bicicleta trafega a 3 m/s e a distância entre as rodas dianteiras e traseiras (conjunto 3 e 2) é de 1.08 metros, a amplitude do degrau é de 0.1 metros altura considerada razoável para uma guia, o tempo de simulação é de 3 segundos, para as simulações em scilab foi considerado um degrau unitário de 0.05m.



8.2 Modelo 2

8.2.1 Determinação dos pólos (autovalores) do sistema de 2 graus de liberdade

Polinômio característico do modelo da bicicleta com 2 graus de liberdade

$$\chi(s) = 23017793 + 93445.369s + 10485.847s^2 + 21.092193s^3 + s^4$$

Pólos do sistema

$$s_1 = -3.2494329 + 56.489719i$$

$$s_2 = -3.2494329 - 56.489719i$$

$$s_3 = -7.2966637 + 84.47555i$$

$$s_4 = -7.2966637 - 84.47555i$$

8.2.2 Análise do sistema no domínio do tempo

De acordo com a figura 13, todos os pólos têm parte real negativa, o que garante a estabilidade do sistema no domínio temporal.

Da análise dos pólos do sistema, os pólos dominantes são o complexo conjugado:

$$s_1 = -3.2494329 + 56.489719i$$

$$s_2 = -3.2494329 - 56.489719i$$

Para o pólo dominante, os seguintes parâmetros podem ser aferidos:

$$\omega_N = 56,6 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.06$$

Analisando o coeficiente de amortecimento do sistema relativo ao pólo dominante, conclui-se que o sistema tem comportamento oscilatório sub-crítico, caracterizado por oscilações amortecidas.

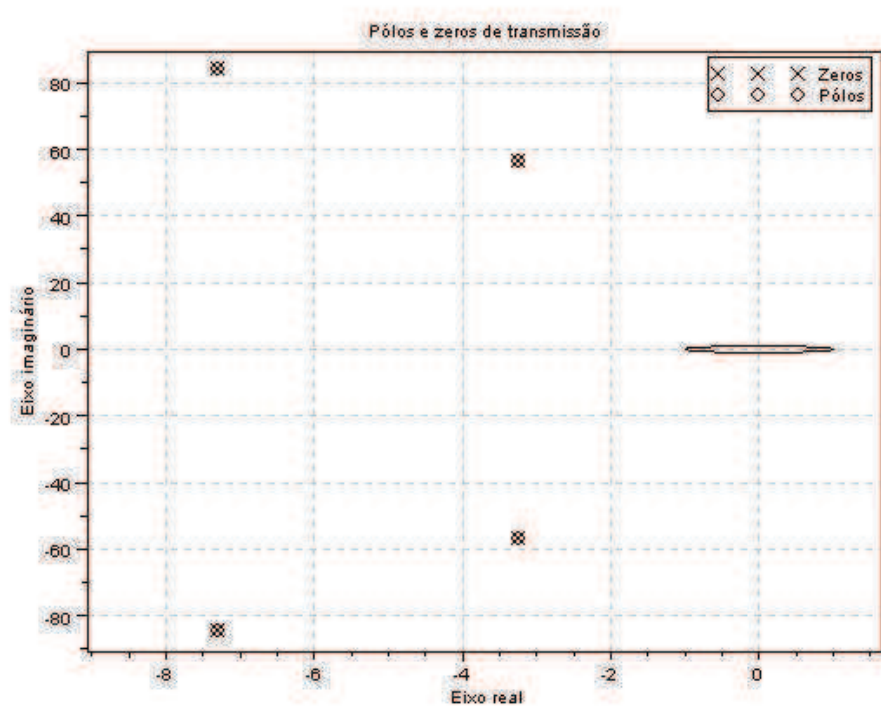


Figura 18 - Lugar dos pólos do sistema de 2 graus de liberdade.

8.2.3 Análise do sistema no domínio da frequência

Nas figuras 14 e 15 estão os diagramas de Bode do movimento de pitch do ciclista e do seu deslocamento vertical.

Dos diagramas plotados percebe-se que:

Os comportamentos do pitch e do deslocamento vertical da massa suspensa excitados nas rodas dianteiras e traseiras é simétrico;

O diagrama de Bode tem pico de máximo positivo para frequências acima de 10 rads/s, significando ganho acima da unidade para essa frequência;

Na mesma frequência em que ocorre o ganho máximo, o sistema passa a inverter de fase.

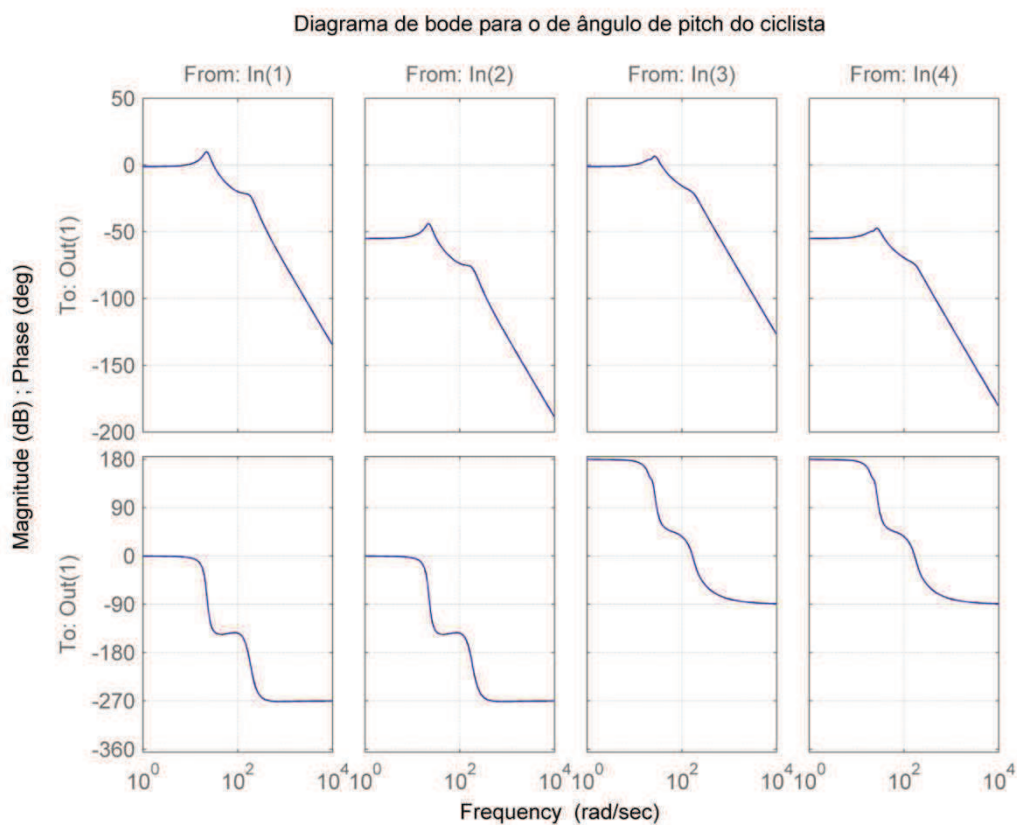


Figura 19 – Diagrama de Bode do sistema de 2 graus de liberdade para a variável ângulo de pitch do ciclista.

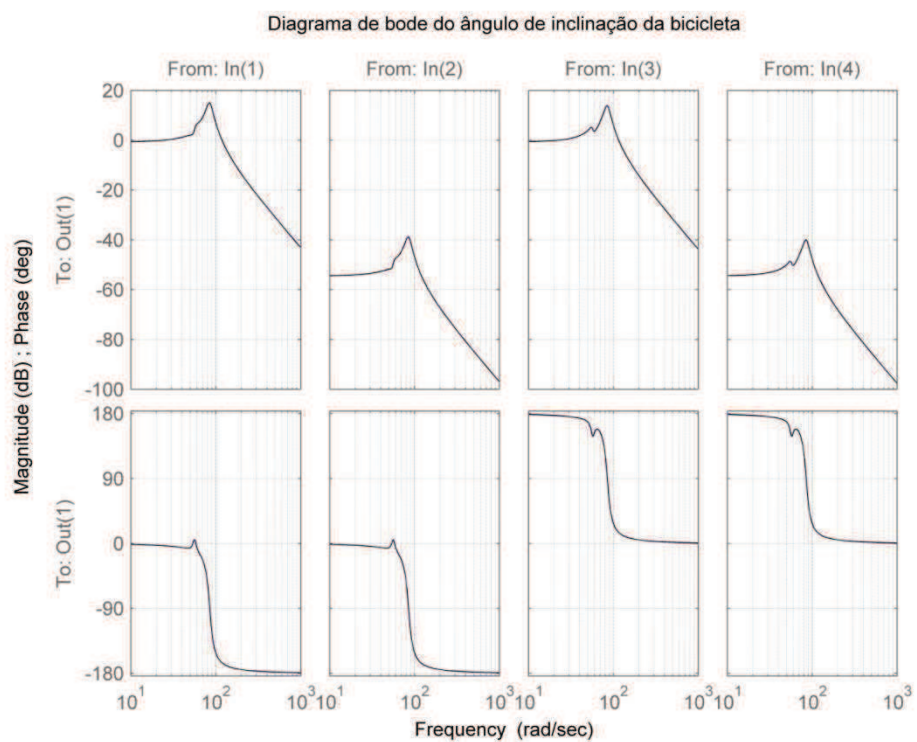


Figura 20 - Diagrama de Bode do sistema de 2 graus de liberdade para a variável deslocamento vertical do ciclista.

8.2.4 Resposta do sistema

O sistemas 2 a 4 foram simulados em simulink via as equações diferencias lineares, para entrada degrau unitário e em scilab via função csim para as entradas degraus e impulso unitário.

Pelos gráficos 20 à 23 percebe-se coerência com a simulação em matlab e scilab, a única diferenças como era de se esperar são as amplitudes de deslocamentos, devido a diferença dos degraus aplicados em cada programa.

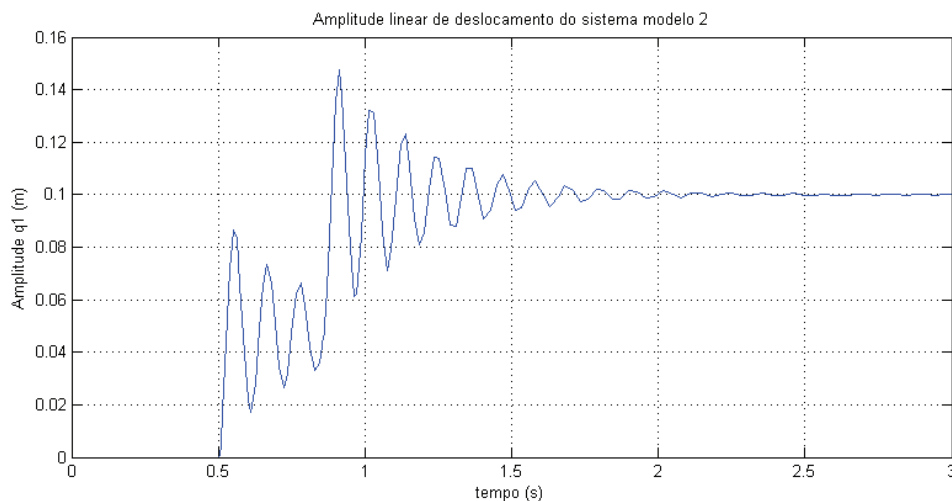


Figura 21: Resposta ao degrau unitário q1_2

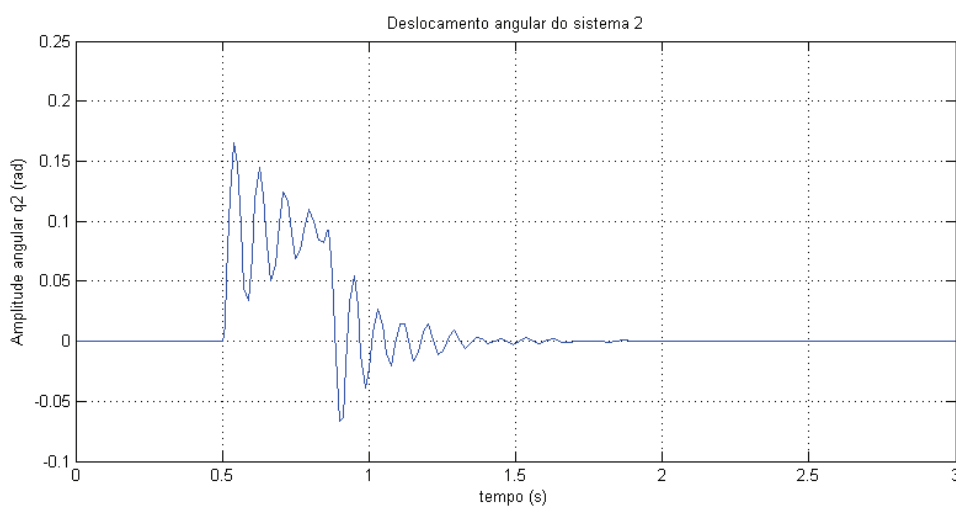


Figura 22: Resposta ao degrau unitário q2_2

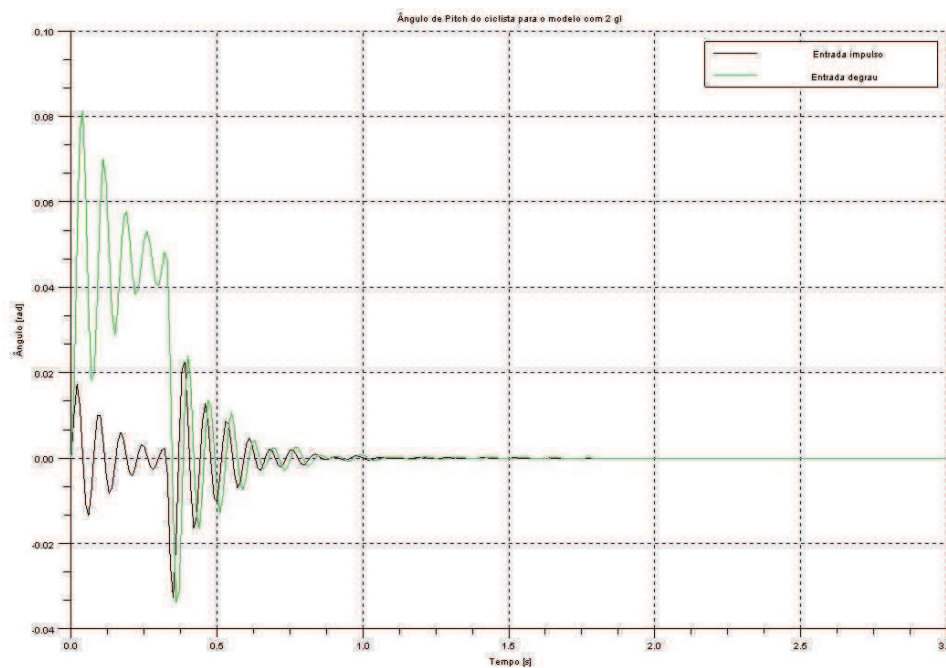


Figura 23 - Resposta temporal do ângulo de pitch do ciclista para o modelo com 2 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.

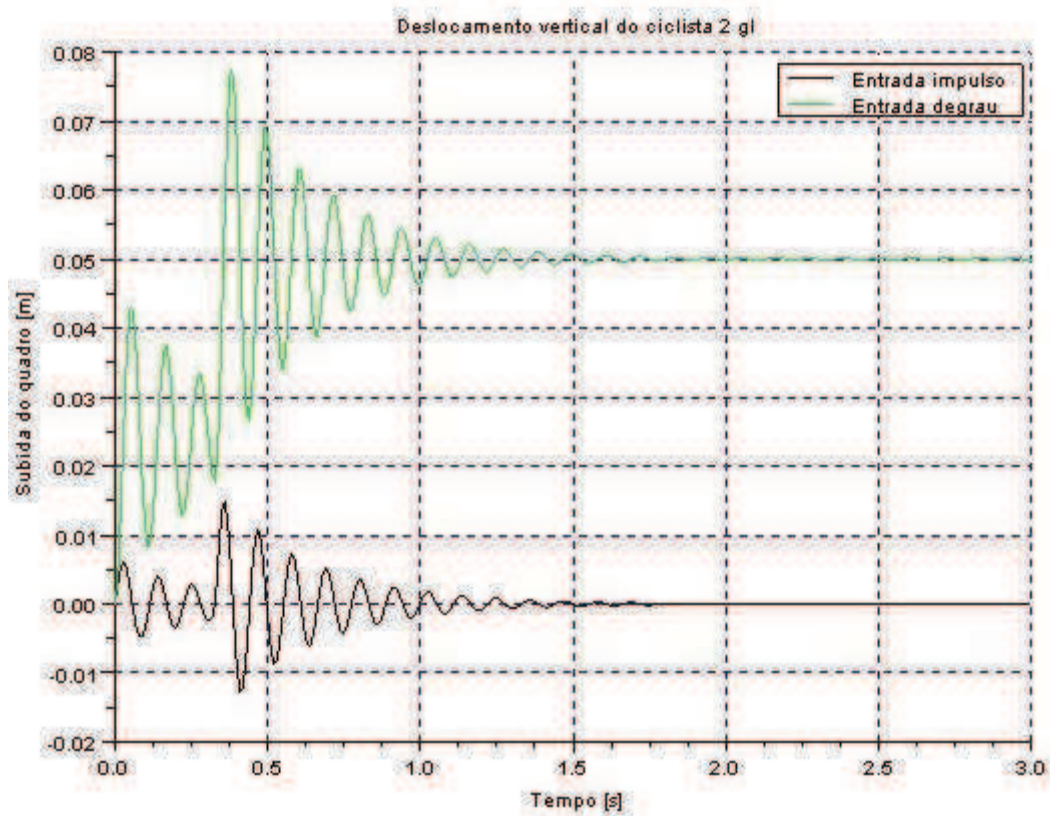


Figura 24 - Resposta temporal do deslocamento vertical do ciclista para o modelo com 2 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.

O modelo de 2 graus de liberdade, embora não apresente as saídas esperadas ao objetivo, pois foi considerada a massa da bicicleta e a massa do ciclista como um corpo só, tem na saída o comportamento característico de todos os modelos a serem apresentados, com vibrações amortecidas e estabilização após 1,5 segundo.

8.3 Modelo 3

8.3.1 Determinação dos pólos (autovalores) do sistema de 3 graus de liberdade

Polinômio característico do modelo da bicicleta com 4 graus de liberdade

$$\chi(s) = 1.201 \times 10^{10} + 1.651 \times 10^9 s + 2.950 \times 10^8 s^2 + 1964978.7 s^3 + 66592.11 s^4 + 221.07671 s^5 + s^6$$

Pólos do sistema

$$s_1 = -2.7944898 + 5.8823857i$$

$$s_2 = -2.7944898 - 5.8823857i$$

$$s_3 = -5.0919752 + 69.459726i$$

$$s_4 = -5.0919752 - 69.459726i$$

$$s_5 = -102.65189 + 218.78425i$$

$$s_6 = -102.65189 - 218.78425i$$

8.3.2 Análise do sistema no domínio do tempo

De acordo com a figura 25, todos os pólos têm parte real negativa, o que garante a estabilidade do sistema no domínio temporal.

Da análise dos pólos do sistema, os pólos dominantes são os complexos conjugados:

$$s_1 = -2.7944898 + 5.8823857i$$

$$s_2 = -2.7944898 - 5.8823857i$$

Para o pólo dominante, os seguintes parâmetros podem ser aferidos:

$$\omega_N = 6,5 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.43$$

Analisando o coeficiente de amortecimento do sistema relativo ao pólo dominante, concluí-se que o sistema tem comportamento oscilatório sub-crítico, caracterizado por oscilações amortecidas.

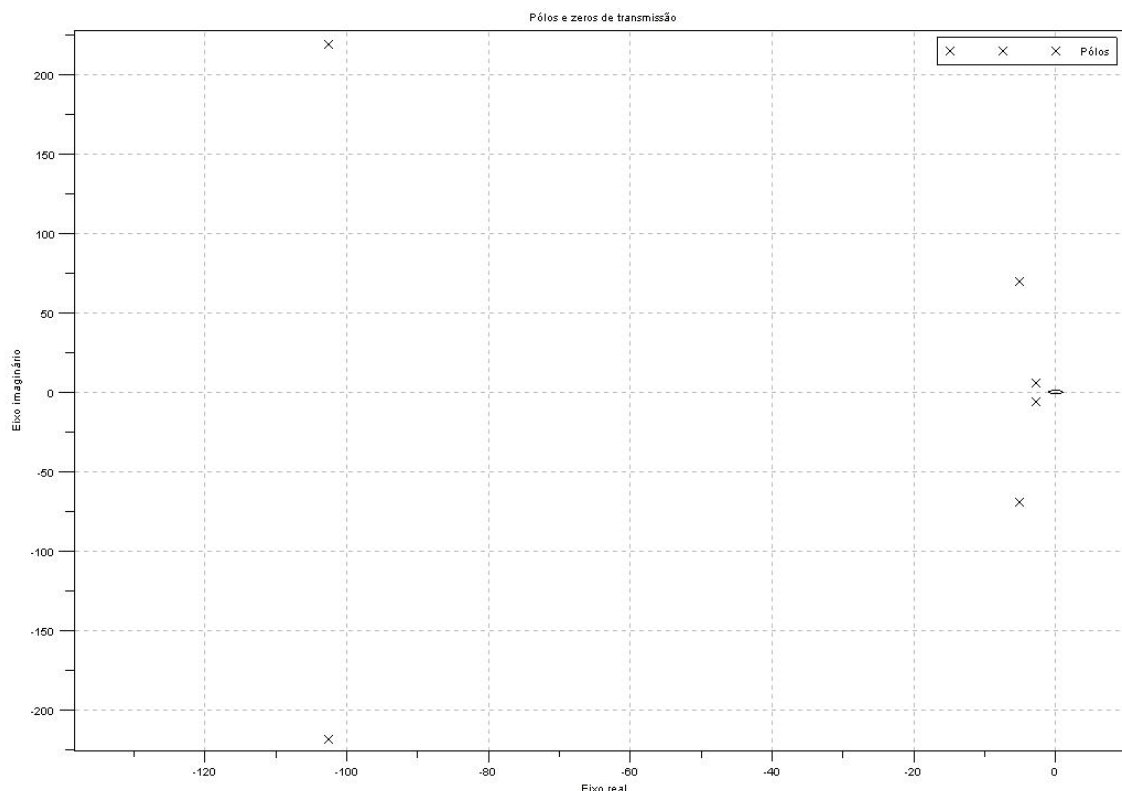


Figura 25 - Lugar dos pólos do sistema de 3 graus de liberdade.

8.3.3 Análise do sistema no domínio da frequência

Nas figuras 26 e 27 estão os diagramas de Bode do movimento de pitch do ciclista e do seu deslocamento vertical.

Dos diagramas plotados percebe-se que:

Os comportamentos do pitch e do deslocamento vertical da massa suspensa excitados nas rodas dianteiras e traseiras é assimétrico;

Caso excitado pela roda dianteira, em geral, o ganho é inferior caso o sistema seja excitado pela roda traseira;

Excitado pela roda dianteira, em geral, o sistema responderá com atraso exceto no pico próximo de 100 Hz.

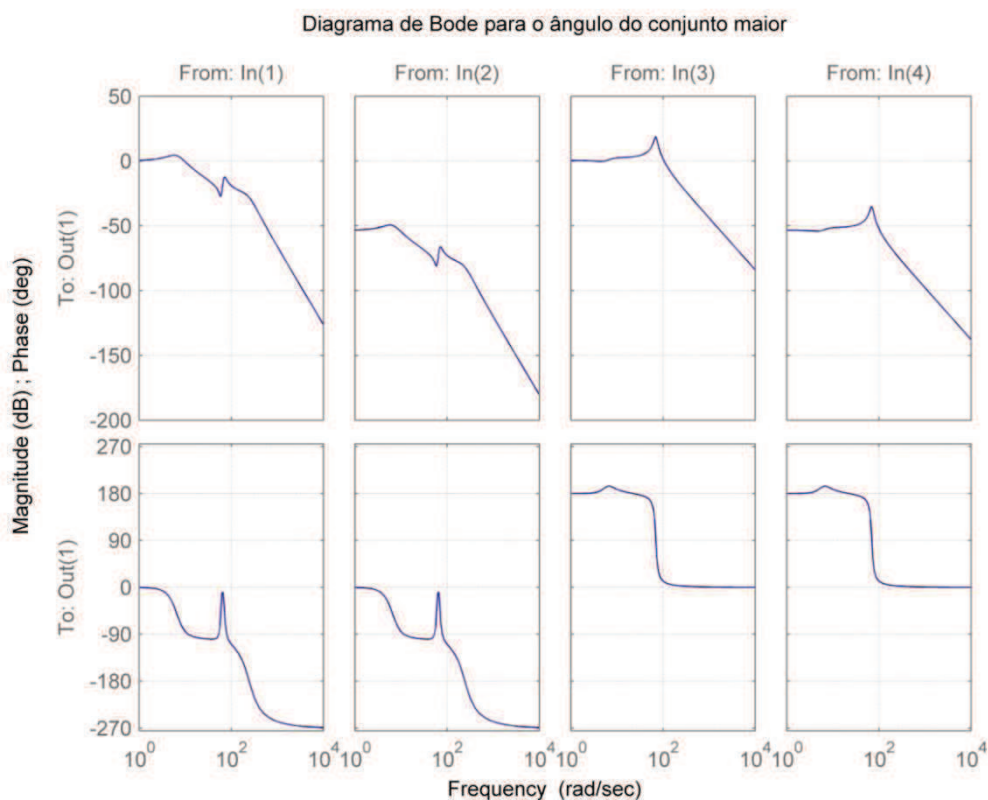


Figura 26 – Diagrama de Bode do sistema de 3 graus de liberdade para o variável ângulo de pitch do ciclista.

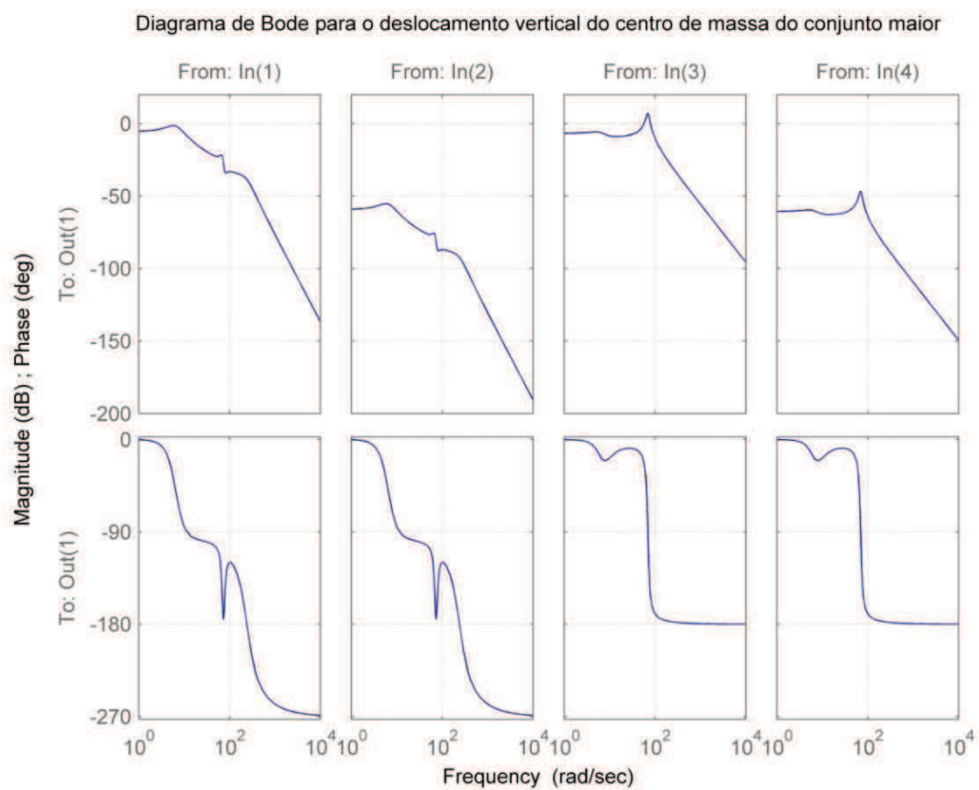


Figura 27 - Diagrama de Bode do sistema de 3 graus de liberdade para a variável deslocamento vertical do ciclista.

8.3.4 Resposta do sistema

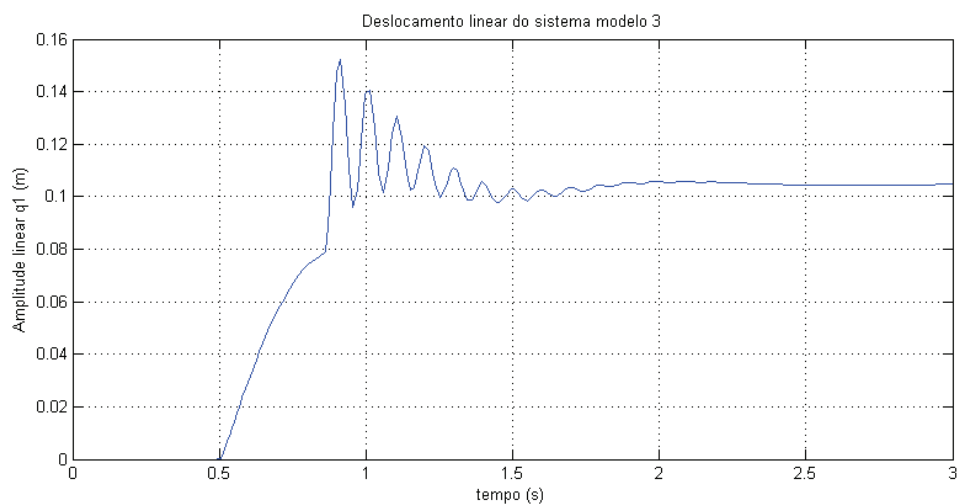
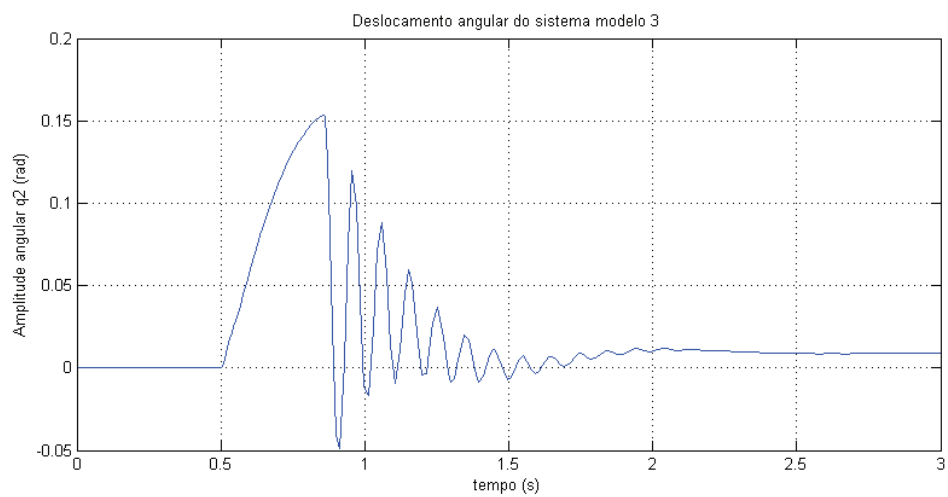
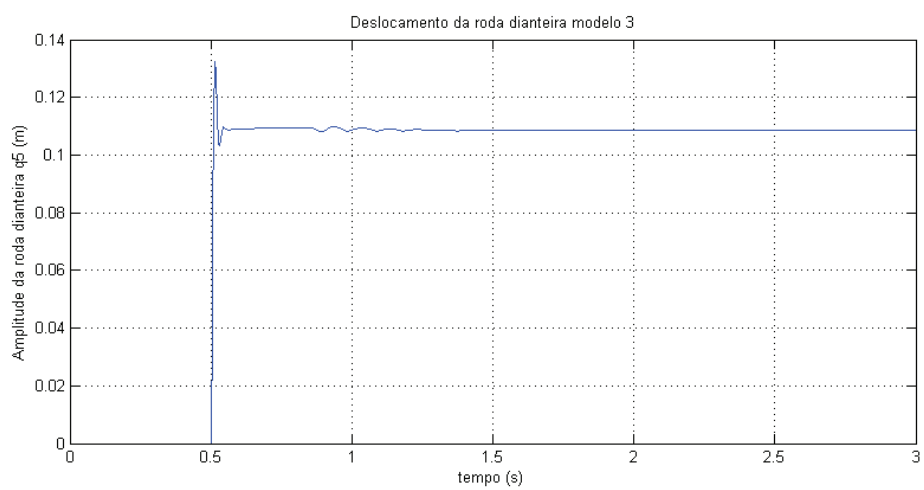


Figura 28: Resposta ao degrau unitário q1_3

**Figura 29: Resposta ao degrau $q2_3$** **Figura 30: Resposta ao degrau $q5_3$**

As figuras 28 a 32 apresentam a resposta temporal do modelo de 3 graus de liberdade para entradas degrau e impulso.

Comparando essas respostas com o modelo de 2 graus de liberdade, percebe-se que o comportamento oscilatório da massa suspensa com excitação na roda dianteira não mais aparece, devido ao amortecimento nessa roda. Assim, o sistema se comporta como criticamente amortecido, rapidamente estabilizando para as entradas apresentadas.

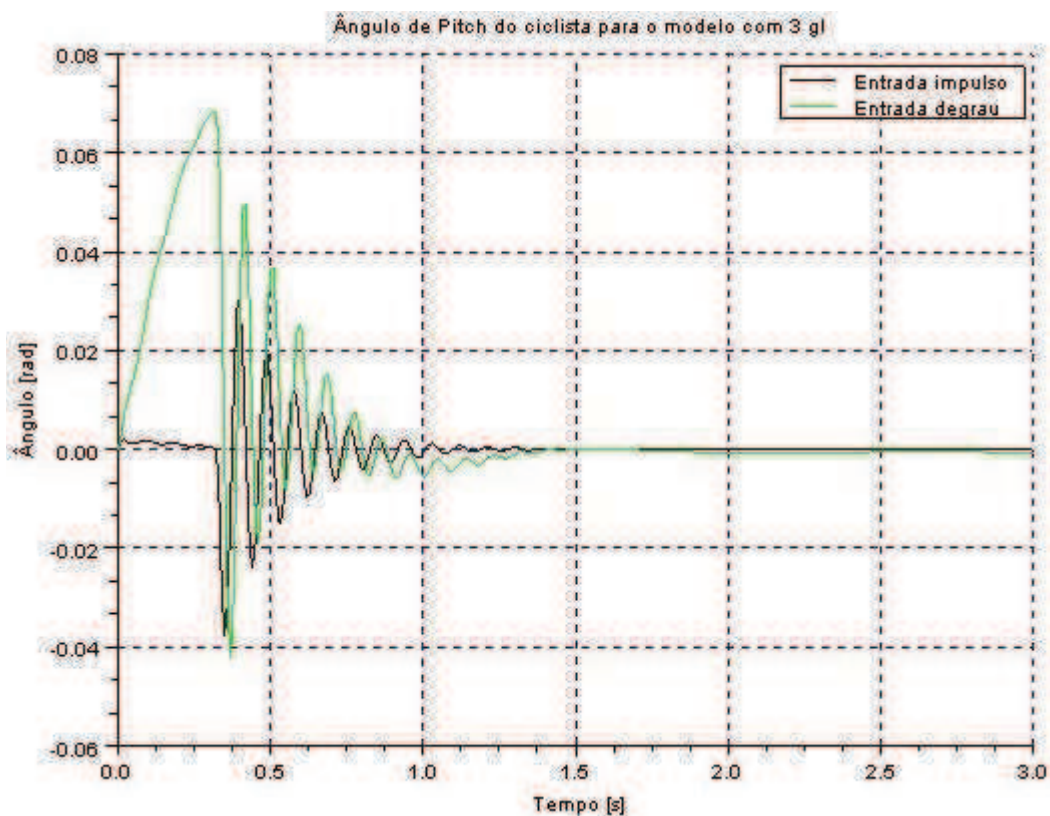


Figura 31 - Resposta temporal do ângulo de pitch do ciclista para o modelo com 3 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.

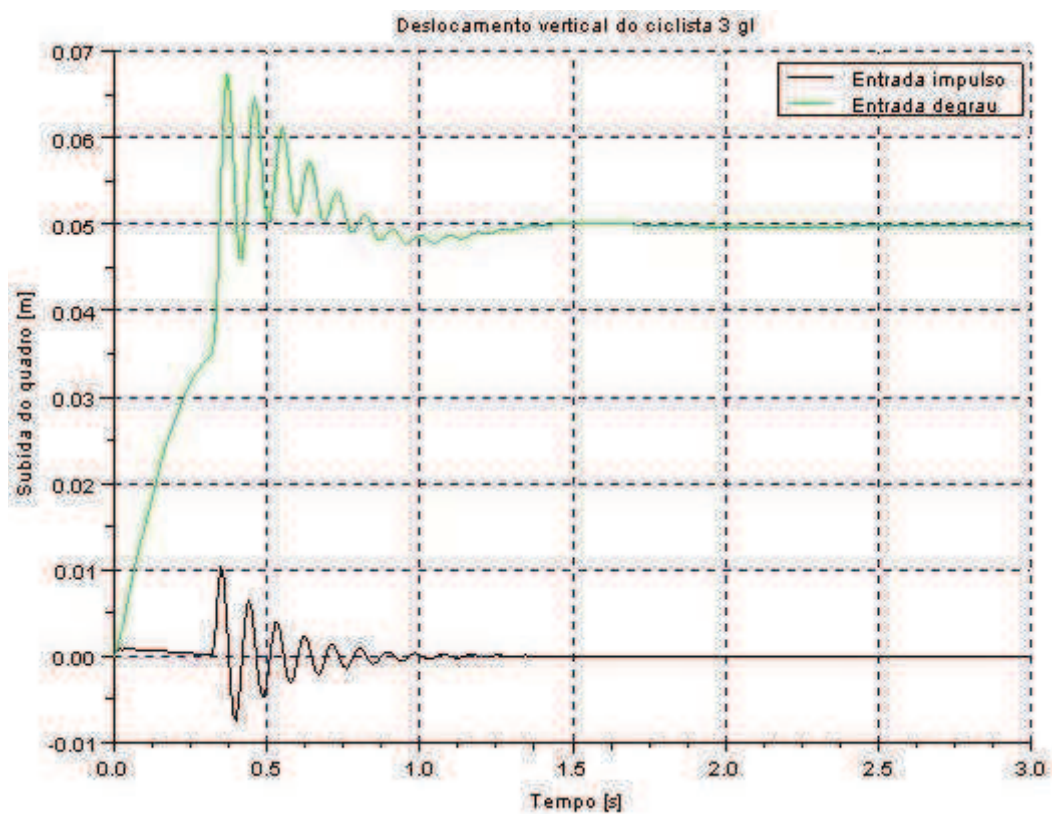


Figura 32 - Resposta temporal do deslocamento vertical do ciclista para o modelo com 3 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.

8.4 Modelo 4

8.4.1 Determinação dos pólos (autovalores) do sistema de 4 graus de liberdade

Polinômio característico do modelo da bicicleta com 4 graus de liberdade

$$\chi(s) = 4.532 \times 10^{14} + 1.701 \times 10^{13} s + 1.783 \times 10^{12} s^2 + 3.811 \times 10^{10} s^3 + 1.603 \times 10^9 s^4 + 13751880 s^5 + 101836.81 s^6 + 351.46339 s^7 + s^8$$

Pólos do sistema

$$s_1 = -3.348465 + 22.258033i$$

$$s_2 = -3.348465 - 22.258033i$$

$$s_3 = -5.313449 + 25.94139i$$

$$s_4 = -5.313449 - 25.94139i$$

$$s_5 = -49.256408 + 176.898i$$

$$s_6 = -49.256408 - 176.898i$$

$$s_7 = -117.81289 + 154.78306i$$

$$s_8 = -117.81289 - 154.78306i$$

8.4.2 Análise do sistema no domínio do tempo

De acordo com a figura 32, todos os pólos têm parte real negativa, o que garante a estabilidade do sistema no domínio temporal.

Da análise dos pólos do sistema, os pólos dominantes são os complexos conjugados:

$$s_1 = -3.348465 + 22.258033i$$

$$s_2 = -3.348465 - 22.258033i$$

Para o pólo dominante, os seguintes parâmetros podem ser aferidos:

$$\omega_N = 22.5 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.15$$

Analisando o coeficiente de amortecimento do sistema relativo ao pólo dominante, conclui-se que o sistema tem comportamento oscilatório sub-crítico, caracterizado por oscilações amortecidas.

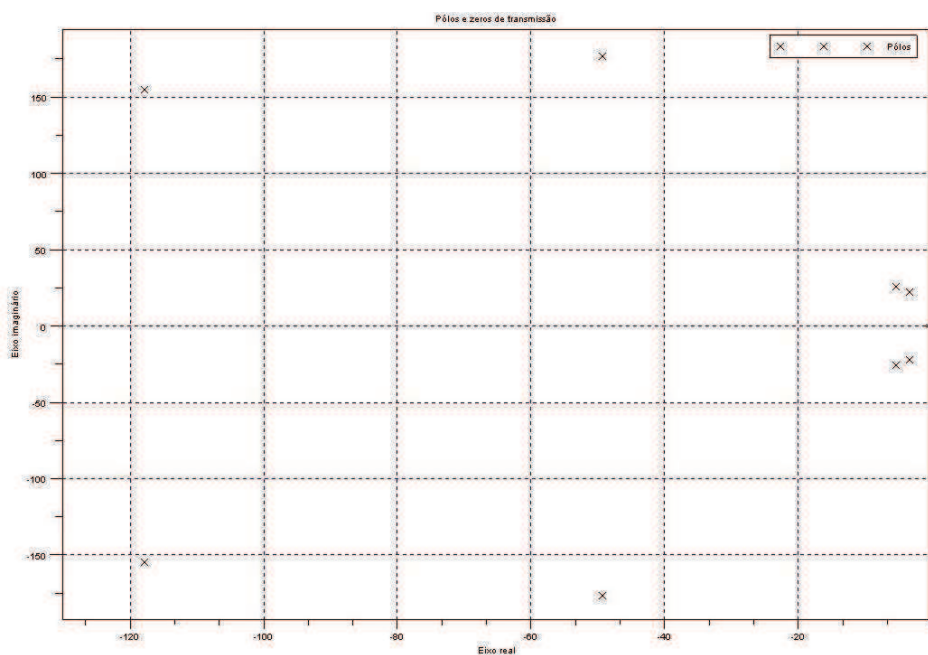


Figura 33 - Lugar dos pólos do sistema de 4 graus de liberdade.

8.4.3 Análise do sistema no domínio da frequência

Nas figuras 33 e 34 estão os diagramas de Bode do movimento de pitch do ciclista e de seu deslocamento vertical.

Ressaltando que para o modelo de 3 graus de liberdade foi analisado a massa suspensa, que corresponde ao conjunto quadro da bicicleta mais ciclista, e que no modelo de 4 graus de liberdade foi analisado apenas a massa do ciclista, dos diagramas plotados percebe-se que o comportamento do ciclista é semelhante ao do modelo 2, porém, com ganhos menores, significando que parte da energia da entrada se dissipou na bicicleta.

A fase da resposta começa a se inverter com frequências de excitação maiores que a excitação no pico.

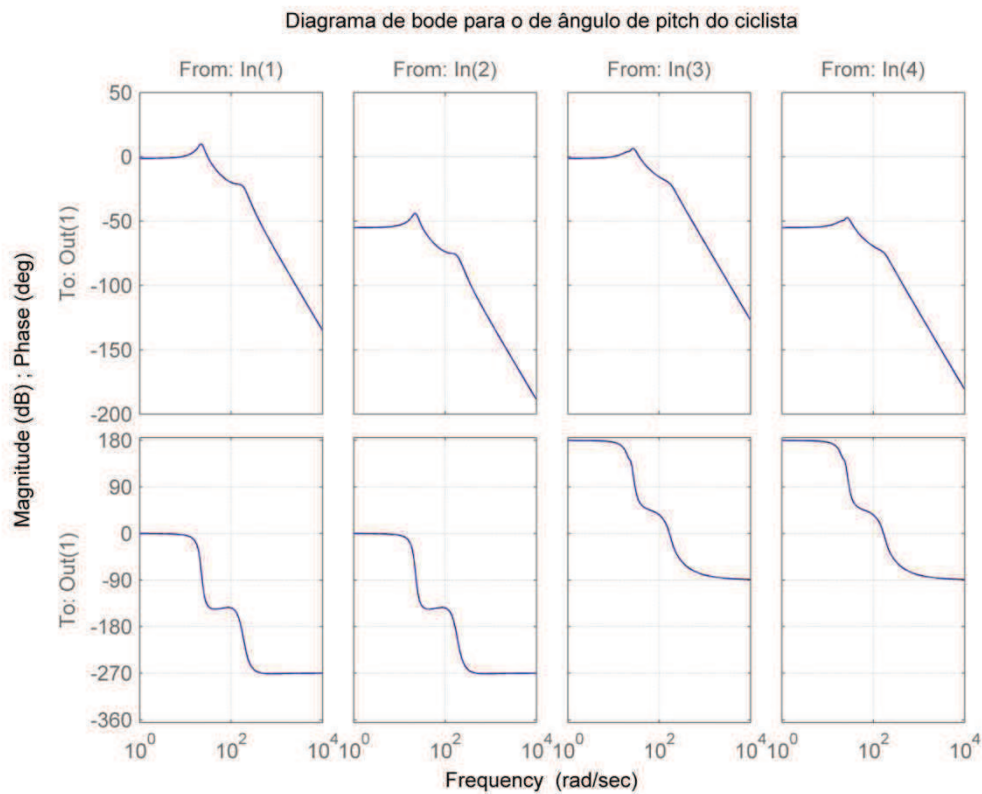


Figura 34 – Diagrama de Bode do sistema de 4 graus de liberdade para a variável ângulo de pitch do ciclista.

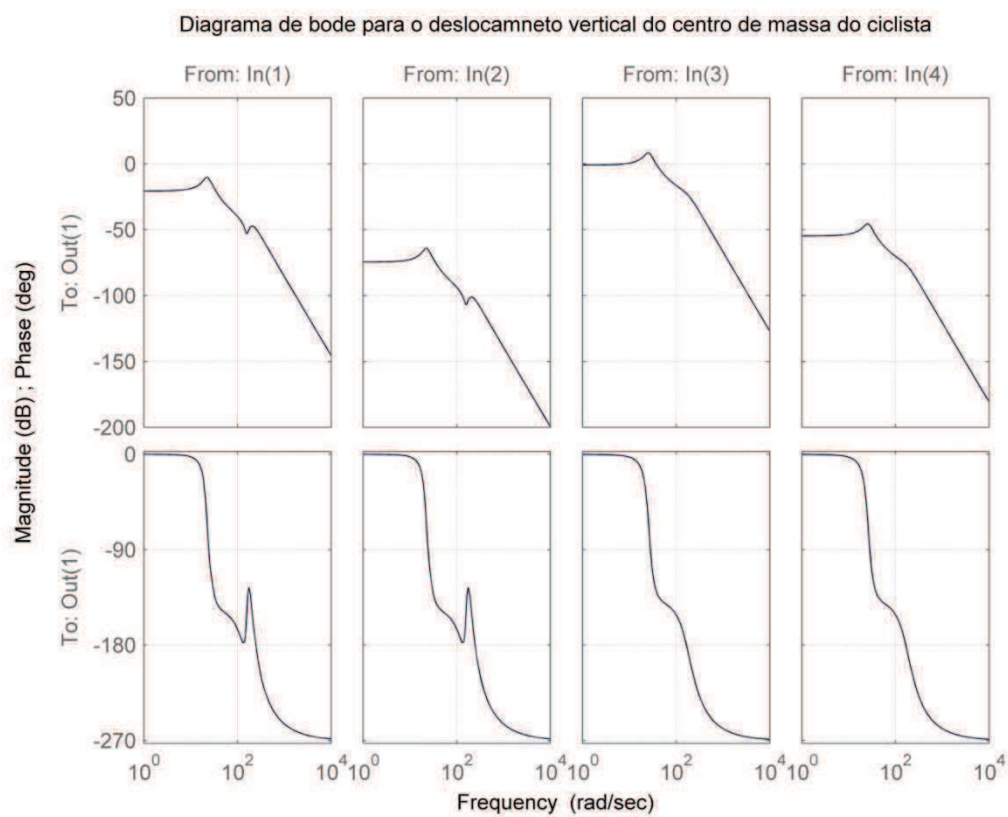


Figura 35 - Diagrama de Bode do sistema de 4 graus de liberdade para a variável deslocamento vertical do ciclista.

8.4.4 Resposta do sistema

Dos diagramas observados, percebe-se a estabilização do sistema após 1,5 segundos e que a massa do ciclista fica sujeita a amplitudes da oscilação menores do que estaria sujeito caso se considerasse a massa da bicicleta acoplada. A oscilação do ciclista também apresenta menor frequência.

Esses comportamentos citados podem ser observados tanto no ângulo de pitch quanto no deslocamento vertical do ciclista figuras 35 a 40.

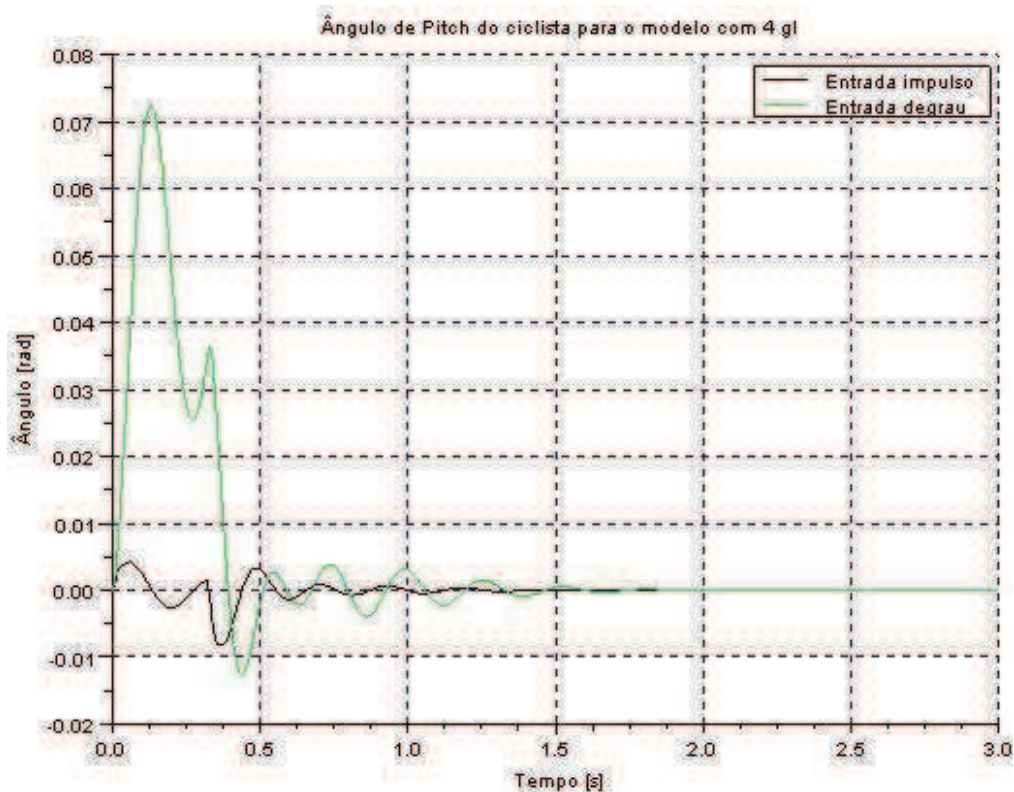


Figura 36 - Resposta temporal do ângulo de pitch do ciclista para o modelo com 4 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.

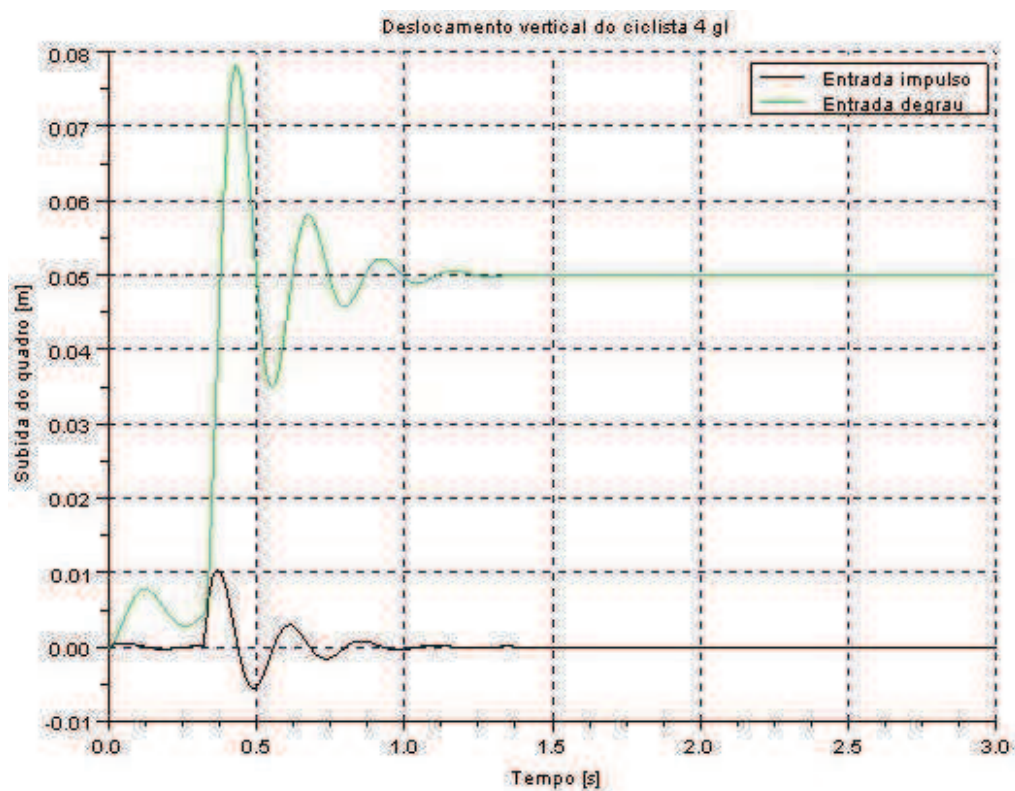


Figura 37 - Resposta temporal do deslocamento vertical do ciclista para o modelo com 4 graus de liberdade e entradas impulso e degrau.

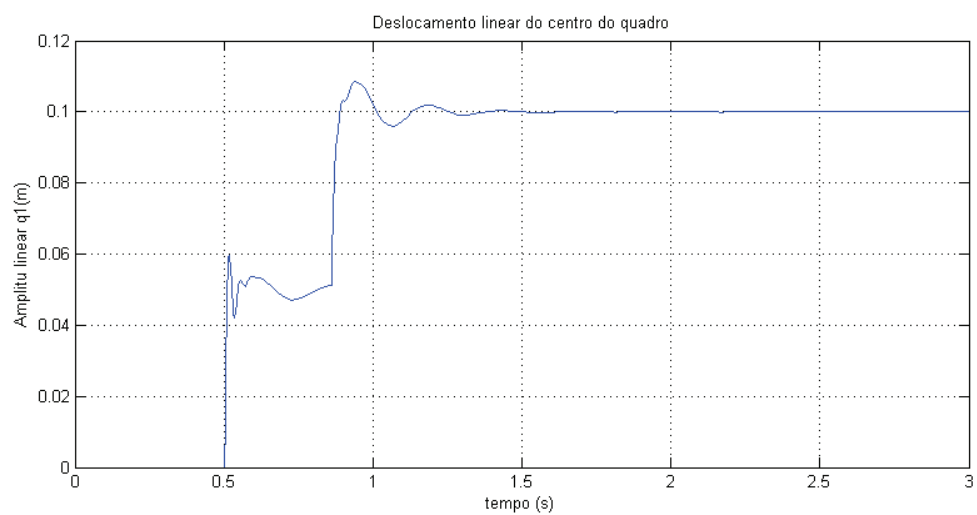


Figura 38: Resposta ao degrau unitário q_{1_4}

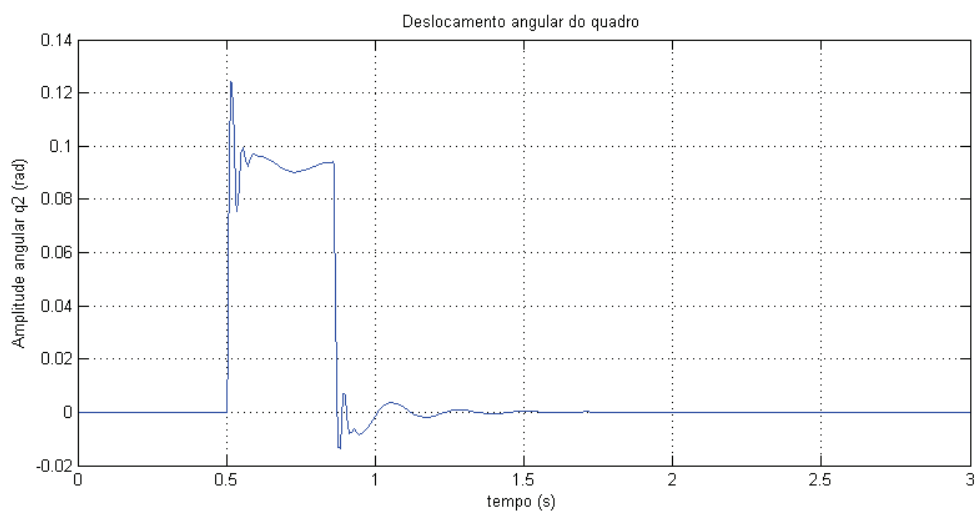


Figura 39: Resposta ao degrau unitário $q2_4$

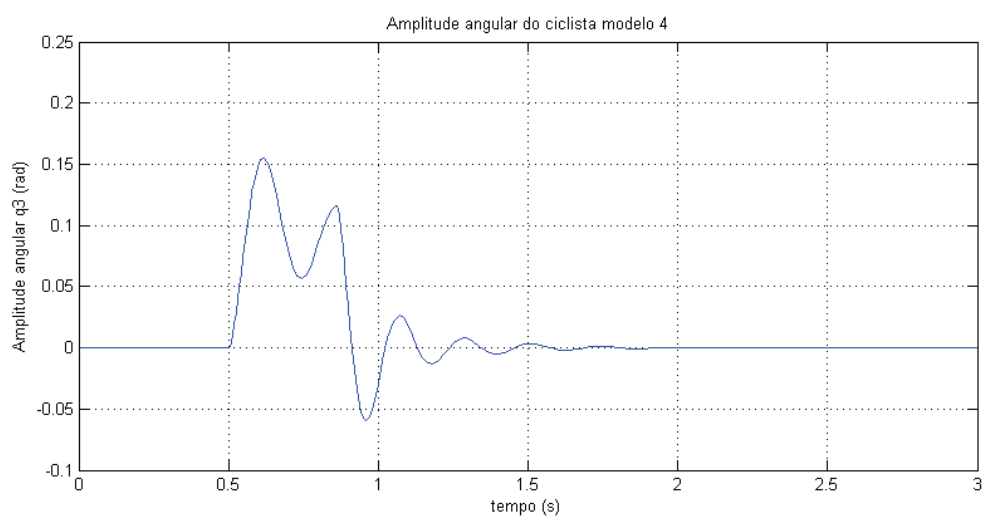


Figura 40: Resposta ao degrau unitário $q3_4$

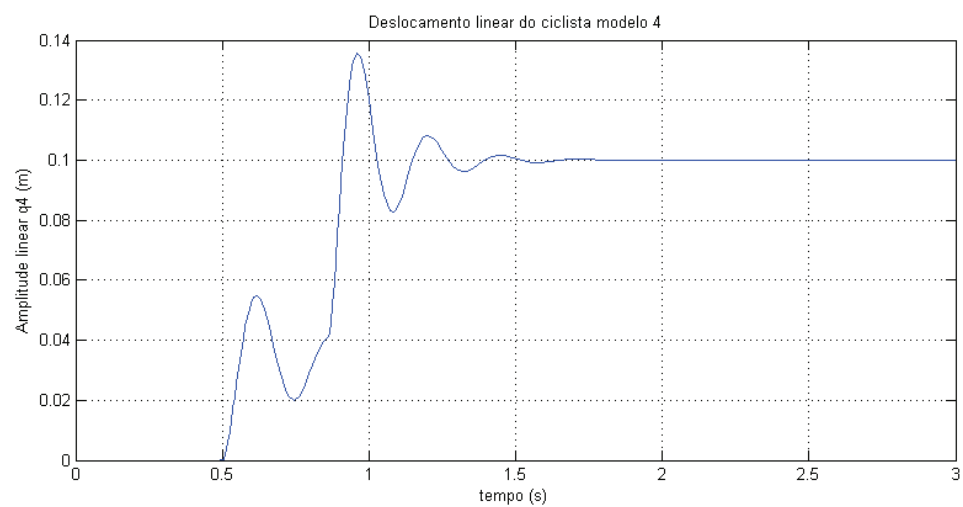


Figura 41: Resposta ao degrau unitário $q4_4$

8.5 Análise das forças envolvidas

8.5.1 Elaboração do diagrama de blocos

A vantagem em usar o simulink surge da simplicidade de gerarmos gráficos e o trabalho algébrico com as equações ser mais versátil, uma vez que elas não precisam estar linearizadas e para implementar devemos apenas isolar os termos de derivada a segunda (o primeiro passo do procedimento anterior).

A única desvantagem surge do fato de termos que adaptar a notação empregada, para a notação do diagrama. Como exemplo ilustrativo considere a figura 43, nela tem-se o diagrama para o modelo 5. Para descrevermos as equações diferenciais usa-se as caixas de funções, ilustrados como TMB_1_5, TMA_1_5, TMA_2_5, TMB_2_5 e TMB_3_5, na figura 43 em cada um deles inserimos as equações diferenciais, por exemplo:

TMB_1_5:

$$\begin{aligned} & (+k4*(u(8)-l35*u(6)-u(2)+l65*u(4)) \\ & +b4*(u(7)-l35*u(5)-u(1)+l65*u(3)) \\ & +k5*(u(8)+l45*u(6)-u(2)-l65*u(4)) \\ & +b5*(u(7)+l45*u(5)-u(1)-l65*u(3)) \\ & -k2*(u(2)-u(4)*l15-u(14)) \\ & -b2*(u(1)-u(3)*l15-u(13)) \\ & -k6*(u(2)+u(4)*l65-u(10)) \\ & -b6*(u(1)+u(3)*l65-u(9)) \\ &)/m15 \end{aligned}$$

As saídas de todas as funções entram em blocos de integração, indicados por 1/s, obtendo assim as velocidades e deslocamentos. Como o sistema de equações é acoplado todas as variáveis de estado entram em um MUX, caixa vertical maior que chaveia as variáveis, em uma única saída.

As caixas q1_5,q2_5,q3_5,q4_5,q5_5, representam osciloscópios onde as saídas podem ser visualizadas, já as caixas “toworkspace “, enviam o vetor de saídas e de tempo para a memória do matlab. Para assim poder gerar gráficos customizados, ou seja , varias saídas para o mesmo gráfico.

Como citado anteriormente, o único inconveniente é a mudança de notação, trabalhosa:

$$q_1 = u(2)$$

$$q_2 = u(4)$$

$$q_3 = u(6)$$

$$q_4 = u(8)$$

$$\dot{q}_1 = u(1)$$

$$\dot{q}_2 = u(3)$$

$$\dot{q}_3 = u(5)$$

$$\dot{q}_4 = u(7)$$

$$q_5 = u(10)$$

$$\dot{q}_5 = u(9)$$

$$\dot{u}(t) = u(11)$$

$$u(t) = u(12)$$

$$\dot{u}(t - t') = u(13)$$

$$u(t - t') = u(14)$$

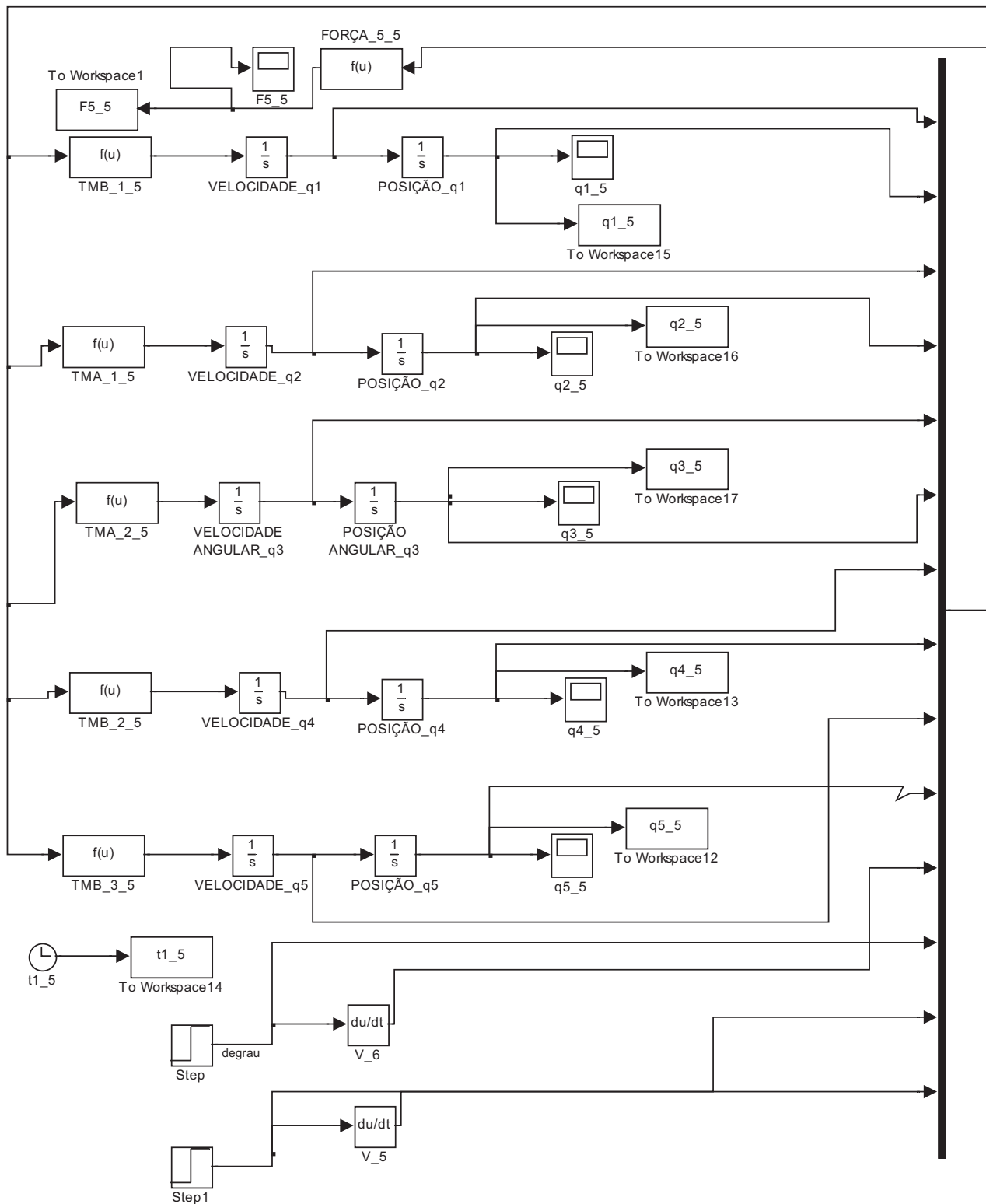


Figura 42 - Diagrama do Simulink.

8.5.2 Resposta do sistema devido ao degrau unitário, forças.

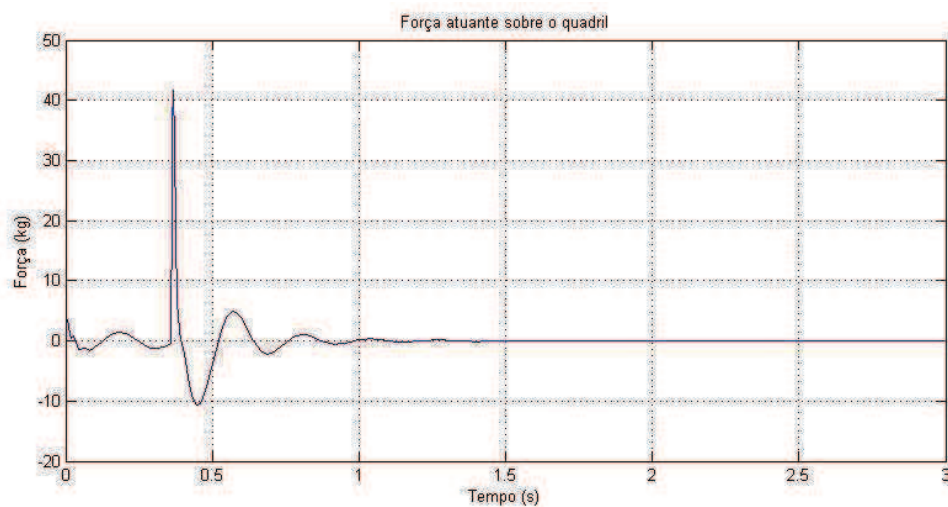


Figura 43: Força atuante quadril modelo 4.

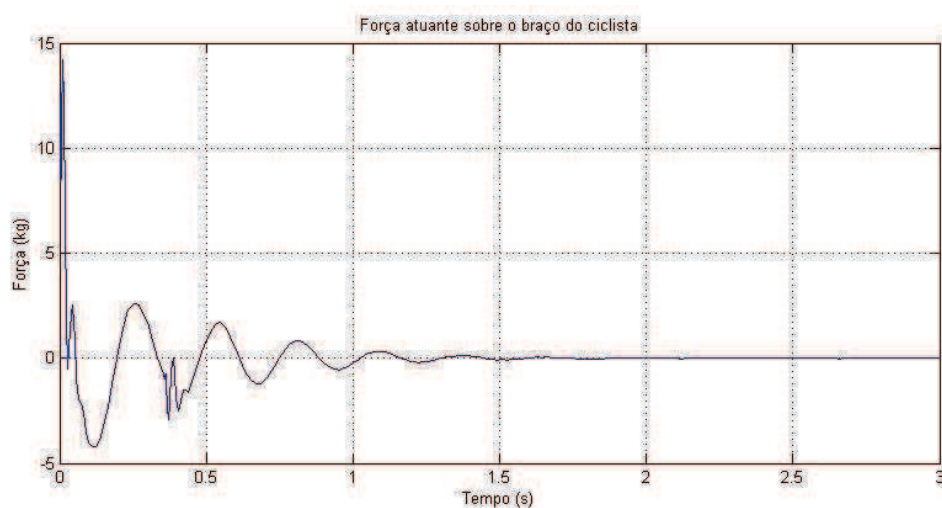


Figura 44: Força atuante no braço modelo 4.

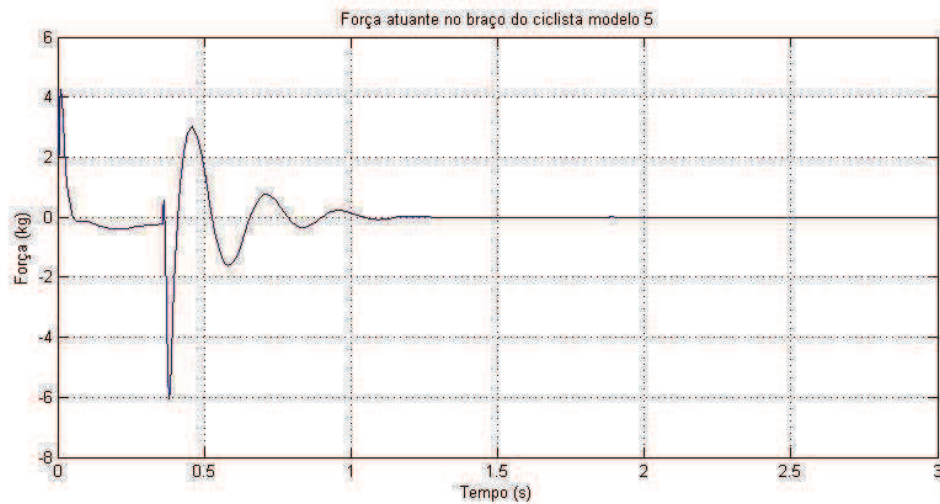


Figura 45: força atuante no braço modelo 5.

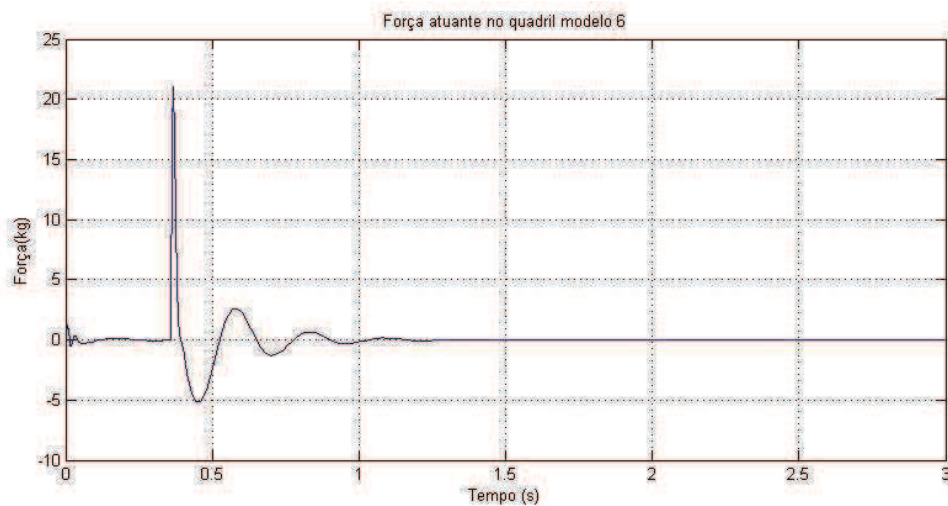


Figura 46: Força atuante no quadril modelo 6

Comparando os gráficos relativos as forças pode-se inferir que a adição das suspensões dianteira e traseira reduziu significativamente as forças atuantes sobre o quadril e braço do ciclista. Para tal basta analisarmos as amplitudes das respostas apresentadas nos pares de comparação figura 44 com 46 e figura 45 com 47.

Soma-se ainda o fato de que a diferença entre os picos representa a defasagem na entrada nas rodas, quando excitadas pelo degrau unitário defasado no tempo.

8.6 Resposta ao regime permanente

A entrada em regime permanente é de grande utilidade para determinar os reais esforços produzidos em uma trajetória media como citado em 5.2.2 a entrada em regime permanente pode ser aproximada por entradas de amplitudes aleatórias corrigidas com a velocidade do ciclista.

E importante ressaltar que mesmo o gráfico da figura 4 ter indicado que as amplitudes máximas são de 0.015m, em cerca de 80% da trajetória de 100 metros as oscilações ficam dentro da faixa considerada. Além disso a frequência de oscilações é corrigida com a área de contato da roda e com sua velocidade, da seguinte forma:

Velocidade de 3m/s;

Contato com o chão de 3cm (adotado);

Assim a roda permanece em uma mesma amplitude por cerca de 3 cm, o que equivale a 0.01 segundos em um mesmo “patamar” portanto para 1 segundo teremos 100 degraus. Usando uma função geradora de degraus randômicos limitados pelas amplitudes -0.010m a 0.010m, do MATLAB obtêm-se a entrada representada abaixo (figura 48):

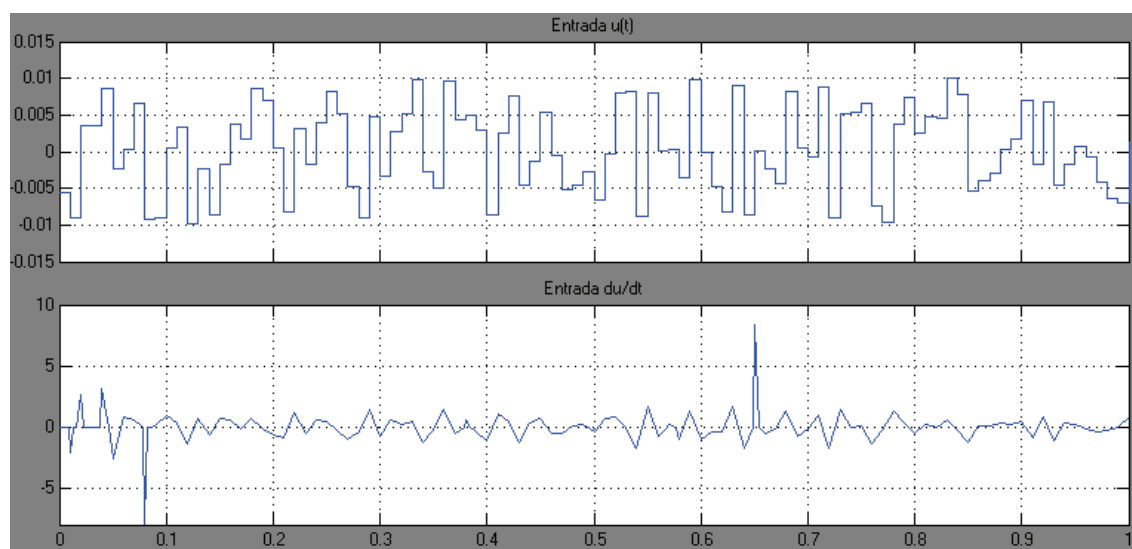


Figura 47: Entrada em regime permanente

8.6.1 Modelo dois

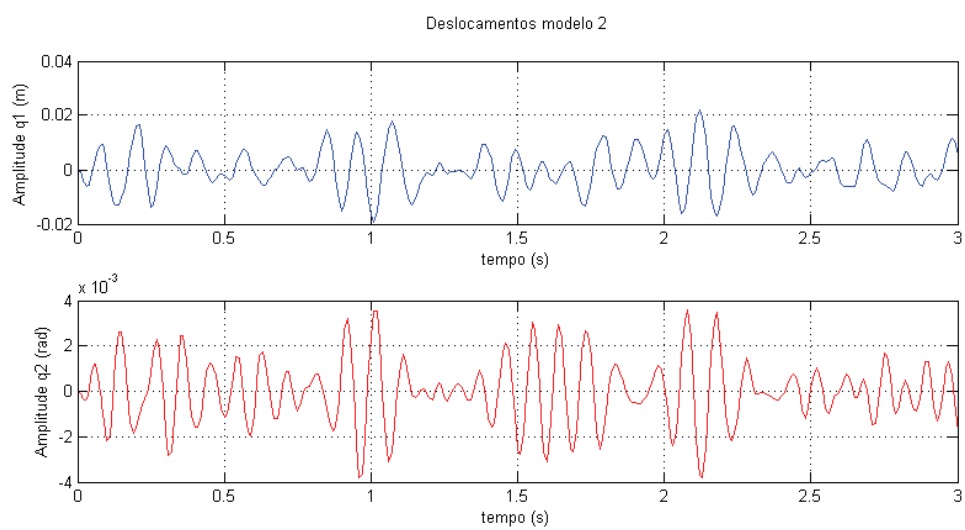


Figura 48: Resposta em regime sistema com dois graus

8.6.2 Modelo três

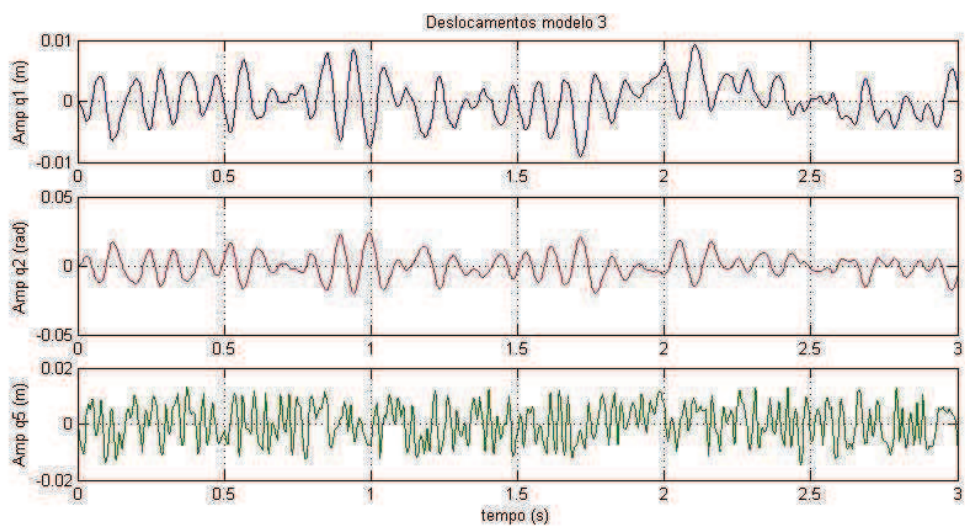


Figura 49: Resposta em regime sistema com três graus

8.6.3 Modelo quatro

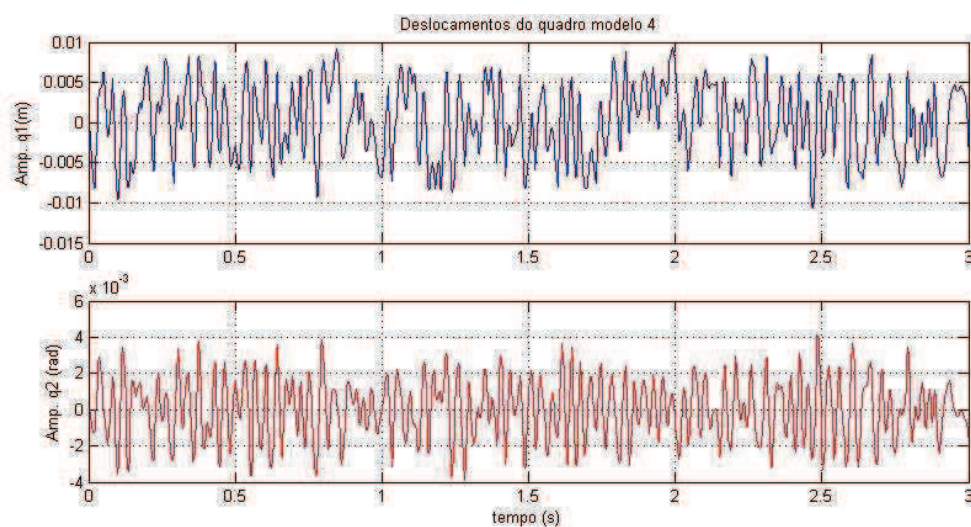


Figura 50: Resposta em regime sistema com quatro graus quadro

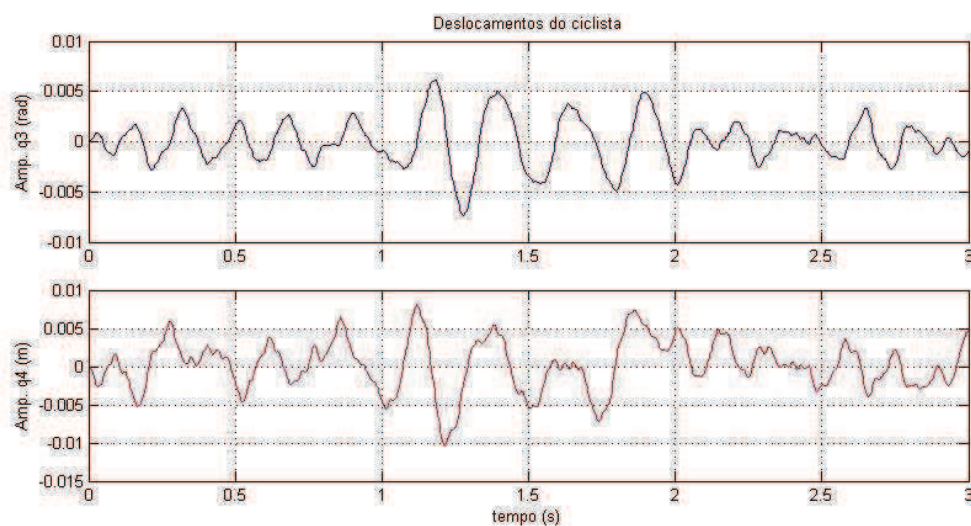


Figura 51: Resposta em regime sistema com quatro graus ciclista

8.6.4 Modelo cinco

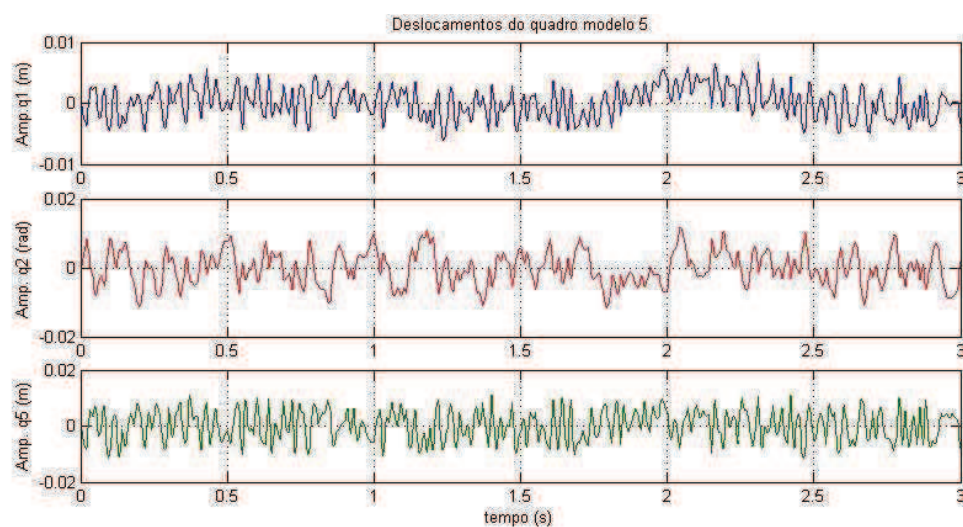


Figura 52: Resposta em regime sistema com cinco graus quadro

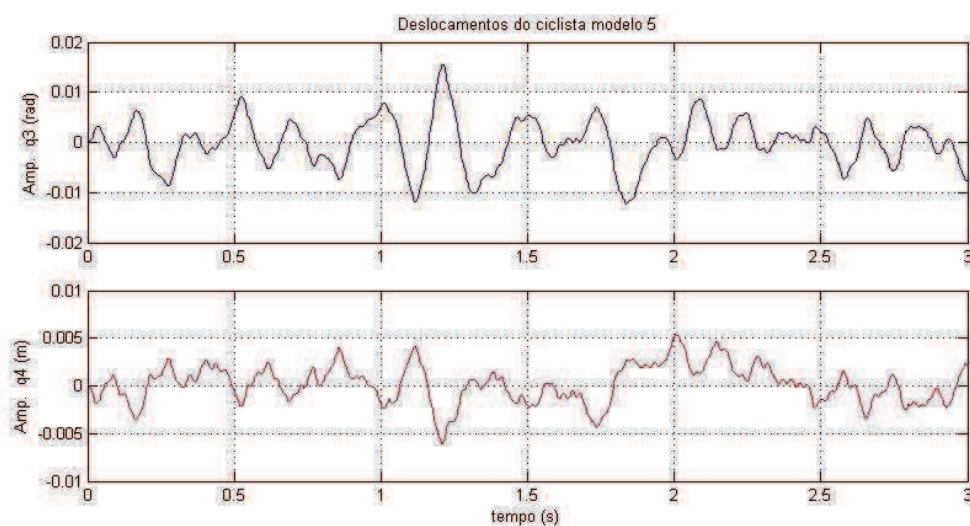


Figura 53: Resposta em regime sistema com cinco graus ciclista

8.6.5 Modelo seis

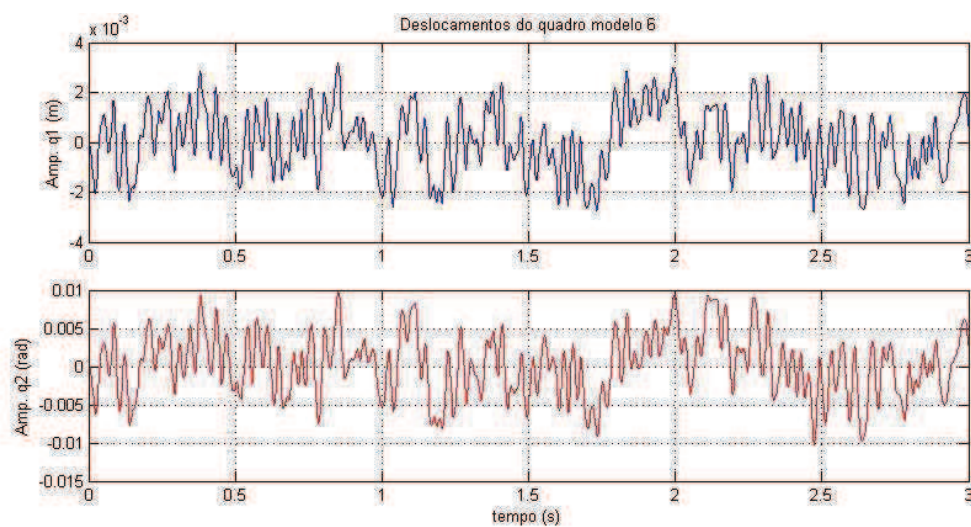


Figura 54: Resposta em regime sistema com seis graus quadro

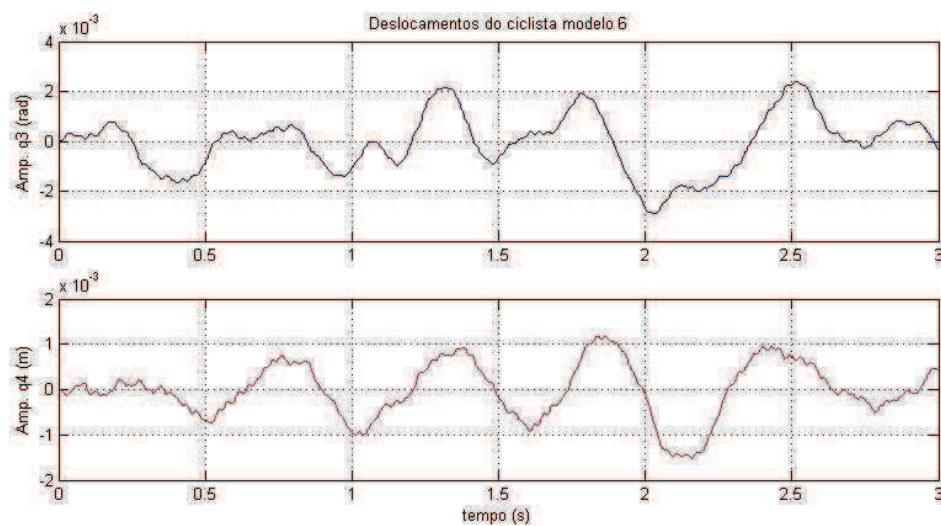


Figura 55: Resposta em regime sistema com seis graus ciclista

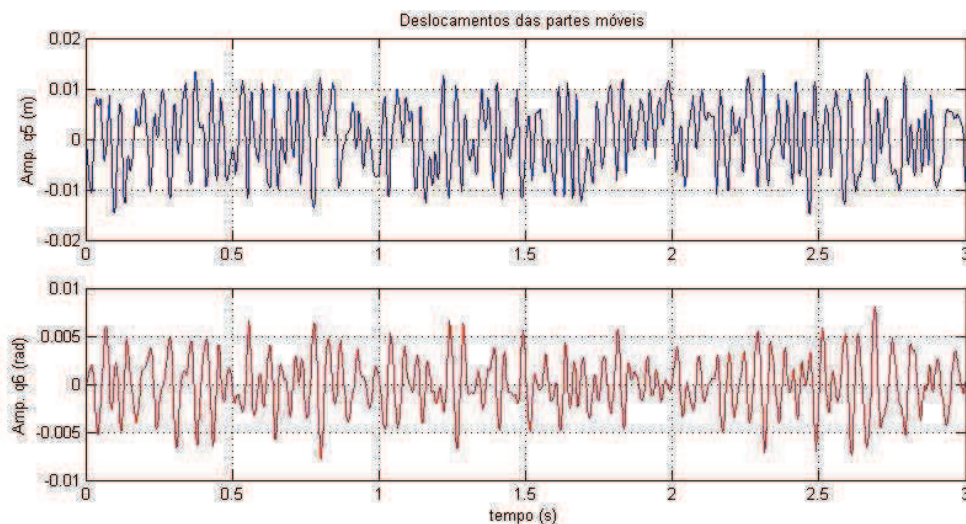


Figura 56: Resposta em regime sistema com seis graus suspensões.

Pelos gráficos de respostas em regime, percebe-se que a adição de um conjunto amortecedor dianteiro não influenciou significativamente as oscilações do centro de massa do ciclista (comparação das figuras 34 e 35), e piorou as oscilações angulares do mesmo.

Fisicamente isso pode ser possível, pois o centro de massa do ciclista encontra-se distante do guidão, e o conjunto a mais diminui a constante elástica equivalente (as molas K5 e K6, praticamente ficam em serie), aumentando assim o movimento de pitch do ciclista.

Opuesto ao resultado anterior a adição de um conjunto amortecedor mola traseiro e dianteiro, provou-se mais eficaz, pois reduziu as amplitudes em 50%, e sua frequência é nitidamente menor (comparação entre as figuras 34 e 36). Fisicamente isso foi possível, pois o momento causado pelo amortecedor traseiro contrabalança o momento do amortecedor dianteiro e o centro de massa este mais próximo do conjunto traseiro fazendo com que o sistema seja mais estável.

9. Discussões

9.1 Modelo de dois graus de liberdade

O modelo com 2 graus de liberdade tem como hipótese básica que a massa do conjunto ciclista e bicicleta são um corpo só. Essa hipótese é válida quando as entradas não são significativas a ponto da posição do ciclista em relação ao quadro da bicicleta não se alterarem significativamente, ou seja, os dois corpos se comportam como um corpo rígido.

A bicicleta modelada não apresenta amortecedores, com toda a rigidez e amortecimento do sistema são modelados na ligação da roda com a massa suspensa. Esse modelo não pode ser utilizado para bicicletas que utilizem dispositivos amortecedores na estrutura.

Desse modelo, as saídas que podem ser observadas são o ângulo de pitch e o deslocamento vertical da massa suspensa. Não é possível concluir sobre a posição do ciclista em uma situação real simulada por esse modelo.

O modelo é útil para se determinar a amplitude máxima de oscilação do conjunto assim como o modo como o conjunto se estabiliza.

A adoção desse modelo para analisar o comportamento do ciclista a entradas externas produz erros na frequência de oscilação superdimensionando esta, resultando que o ciclista do modelo oscila cerca de 2 vezes mais do que ocorre em uma situação real.

A utilização desse modelo para simular uma bicicleta amortecida resulta em erros na amplitude da resposta do ciclista, superdimensionado-a, e erros no ângulo de fase, resultando em um comportamento que não é o existente.

Contudo para uma primeira aproximação é válido, levando em conta que o trabalho computacional e algébrico reduzido.

9.2 Modelo de três graus de liberdade

O modelo de 3 graus de liberdade considera um amortecedor fixo na estrutura da roda dianteira da bicicleta. O conjunto da massa suspensa da bicicleta e a massa

do ciclista ainda são considerados como um único corpo, persistindo as limitações do modelo anterior.

Esse modelo é válido quando se analisa bicicletas que apresentem o dispositivo de amortecimento na posição dianteira.

As saídas apresentadas são o ângulo de pitch, o deslocamento vertical da massa suspensa e o deslocamento da roda dianteira.

Tal modelo é útil para avaliar o efeito de se acoplar ao quadro da bicicleta um amortecimento e também delimitar os parâmetros utilizados no projeto desse amortecedor, para que o conforto do ciclista seja atingido.

A adoção desse modelo para simular o comportamento do ciclista resulta nos erros do modelo anterior, com oscilação superdimensionada.

9.3 Modelo de quatro graus de liberdade

O modelo de 4 graus de liberdade considera a massa do ciclista como separada da massa suspensa da bicicleta. A massa do ciclista está unida a bicicleta por molas e amortecedores que representam o comportamento do selim, estrutura tubular do selim e tecido humano. O modelo é válido para se analisar o comportamento do ciclista quando a bicicleta é sujeita a excitação externa.

Como não há amortecimento dianteiro e traseiro, esse modelo apenas é válido na análise de bicicletas sem esse dispositivo na estrutura.

As saídas desse modelo são o ângulo de pitch e deslocamento vertical do ciclista, o ângulo de pitch e deslocamento vertical do quadro da bicicleta.

9.4 Modelo de cinco graus de liberdade

O modelo de 5 graus de liberdade considera o modelo anterior, com o ciclista distinto da bicicleta, porém com a bicicleta apresentando estrutura de amortecimento dianteiro. Assim, o modelo é válido caso se analise o comportamento do ciclista pedalando uma bicicleta com amortecimento estrutural dianteiro, ele pode ainda ser utilizado para avaliar as forças sobre o braço do ciclista, e ao compará-lo com o modelo 4 temos uma estimativa do ganho de conforto.

As saídas desse modelo são o ângulo de pitch e deslocamento vertical do ciclista, o ângulo de pitch e deslocamento vertical do quadro da bicicleta e o deslocamento da roda dianteira da bicicleta.

9.5 Modelo de seis graus de liberdade

O modelo de 6 graus de liberdade é o modelo anterior, porém, considerando amortecimento traseiro. O modelo é válido para analisar o comportamento do ciclista pedalando esse tipo de bicicleta. Nesse caso o modelo é interessante para avaliar os esforços sobre o quadril do ciclista, e ao compará-lo com o modelo 4, analogamente ao modelo 5 temos uma estimativa do ganho de conforto.

As saídas desse modelo são o ângulo de pitch e deslocamento vertical do ciclista, o ângulo de pitch e deslocamento vertical do quadro da bicicleta e o deslocamento da roda dianteira e traseira da bicicleta.

10. Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo a análise do comportamento do ciclista quando este pedala bicicletas do tipo:

Rígida, sem dispositivos de amortecimento;

Com amortecimento dianteiro;

Full suspension.

Para tanto, foi simulado os sistemas bicicleta mais ciclista sujeitos a entradas impulso e degrau unitários para o caso de bicicletas rígidas e com amortecimento dianteiro, e entrada de pista para o caso de bicicletas com amortecimento dianteiro e Full suspension.

As seguintes conclusões foram tomadas da análise dos gráficos:

Da análise das respostas dos modelos, percebe-se que todos apresentam comportamento de sistema de 2º ordem, do tipo massa-mola-amortecedor, todos com pólos complexos de parte imaginária negativa, resultando na estabilidade de todos os sistemas apresentado;

A hipótese de concentrar a massa do ciclista com a massa da bicicleta superdimensiona a frequência de oscilação do ciclista, quase dobrando esta. Porém, como conclusões válidas do modelo que podem ser tomadas com boa precisão estão a amplitude máxima de oscilação do ângulo de pitch e do deslocamento vertical, a resposta em regime e o tempo até que o sistema entre em equilíbrio. Para uma entrada degrau unitário de 0,05 metros, que é a altura média de uma guia, o sistema modelado atinge ângulo de 0,08 rads e estabiliza em zero após 1 segundo. Quanto ao deslocamento de 0,08 m, o sistema estabiliza na amplitude do degrau após 1,5 segundos. Esses valores de tempo se mantiveram constantes em todos os modelos e as amplitudes se repetiram para o modelo que considerou o ciclista distinto da bicicleta;

Da análise do diagrama de Bode do sistema com amortecimento dianteiro, submetido à entradas impulso e degrau, percebe-se que este atrasa a resposta da massa dianteira em relação à entrada aplicada na roda dianteira. O amortecimento também reduz a amplitude de oscilação das saídas em cerca de 7%, e modifica o comportamento da massa suspensa durante o intervalo de tempo em que a roda

dianteira está subindo a guia, variando do comportamento oscilatório, como ocorria no modelo da bicicleta rígida, para o amortecido supercrítico;

No que diz respeito à comparação entre os modelo 4 com 5 e 6, nota-se a redução das forças atuantes sobre o braço do ciclista em 70% da amplitude máxima do modelo 4 (a força reduziu de 15kgf para 5kgf aproximadamente), ao compararmos os modelos 4 e 6 temos uma redução de 50% (a força sobre o quadril caiu de 40kgf para 20kgf).

A relação entre as amplitudes das forças esperadas sobre o quadril devem ser maiores pois o centro de massa do ciclista encontra-se mais próximo do selim do que do guidão, as simulações mostraram-se coerentes quanto a esse aspecto.

A redução das forças atuantes era esperada, contudo deve-se resaltar que para a perfeita coerência entre a realidade e os modelos deve-se compará-los com dados experimentais

A análise em regime mostrou coerência entre si ,mas como citado no item anterior, a necessidade de dados experimentais que sustente o modelo é primordial para a boa prática de engenharia.

11. Referências

[1] Escola de bicicleta.

Disponível em: <<http://www.escoladebicicleta.com.br/historiadabicicleta.html>>

Acesso em: 17 de outubro de 2009.

[2] Associação Brasileira dos Fabricantes de Motocicletas, Ciclomotores, Motonetas, Bicicletas e Similares. Disponível em: <<http://abraciclo.com.br/>>

Acesso em: 10 de outubro de 2009.

[3] Wikipédia, the free encyclopedia.

Disponível em:

<<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/56/Mountainbike-zeichnung.png>>.

Acesso em: 9 de setembro de 2009.

[4] Y.Champoux,S.Richard and J.-M.Drouet,VélUS, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada. Bicycle Structural Dynamics. Sound and vibration Magazine.

[5] Bicycle materials Case study.

Disponível em:

<http://depts.washington.edu/matseed/mse_resources/Webpage/Bicycle/Bicycle.20Materials.20Case.20Study.htm>.

Acesso em: 20 de outubro de 2009

[6] Waechter, Matthias. Riess, Falk. Zacharias, Norbert. A multibody Model for the Simulation of Bicycle Suspension Systems. Journal of Vehicle System Dynamics, vol. 37 2002 No1,pp3-28.

[7] He Qinchang, Fan Xiumin, Ma Dengzhe. Full Bicycle Dynamic Model for interactive Bicycle Simulator. Journal of computing and information Science in engineering, vol. 5 2005 December ASME.

[8] D'Apuzzo, M, Nicolosi V.Mattarocci, M. Predicting Roughness Progression Of Asphalt Pavements By Empirical- Mechanistic Model, University of Cassino Italy.

[8] Caloi “movimentando a vida”, catálogo disponível no site, linha 2009.

Disponível em: <<http://www.caloi.com.br/>>

Acesso em: 17 de outubro de 2009.

[9] Sundown “bikes” catálogo on-line, linha 2009.

Disponível em: <<http://www.sundownnet.com.br/site/bikes/www/>>

Acesso em: 10 de outubro de 2009.

[10] Houston “sua vida merece” catálogo disponível no site, linha 2009.

Disponível em: <<http://www.houston.com.br/br/inicio/>>

Acesso em: 10 de outubro de 2009.

[11] GT bicycles catálogo disponível no site, linha 2010.

Disponível em: <<http://www.gtbicycles.com/usa/eng/Bikes/Mountain/>>

Acesso em: 3 de outubro de 2009.

[12] Trek bicycles catálogo disponível no site, linha 2009.

Disponível em: <<http://www.trekbikes.com/us/en/>>

Acesso em: 26 de setembro de 2009.

[13] TAM: Theoretical and applied Mechanics. Bicycle Dynamics.

Disponível em: <<http://audiophile.tam.cornell.edu/~als93/Bicycle/index.htm>>

Acesso em: 01 de setembro de 2009.

12. Anexo 1: Programas utilizados.

%Programas em scilab

//Programa que realiza os procedimentos de modelagem ao modelo de 2 graus de liberdade

clear all

//Definição dos parâmetros físicos do modelo

//massas e momentos de inércia bicicleta (minuscuro) e ciclista (maiscuro):

M12=75+8.5;

J12=10.897;

//Constantes de amortecimento e elasticas:

b2=272;

b3=272;

k2=134000;

k3=134000;

//Constantes geométricas:

l12=0.520;

l22=0.560;

//Definição dos elementos da matriz A do espaço de estados

k11=(-k2-k3)/M12;

k12=(-k3*l22+k2*l12)/M12;

k21=(k2*l12-k3*l22)/J12;

k22=(-k3*l22*l22-k2*l12*l12)/J12;

b11=(-b2-b3)/M12;

b12=(-b3*l22+b2*l12)/M12;

b21=(b2*l12-b3*l22)/J12;

b22=(-b3*l22*l22-b2*l12*l12)/J12;

A=[0 0 1 0

0 0 0 1

k11 k12 b11 b12

k21 k22 b21 b22];

//Definição dos elementos da matriz B do espaço de estados

f11=k3/M12;

f12=b3/M12;

f13=k2/M12;

f14=b2/M12;

f21=k3*l22/J12;

f22=b3*l22/J12;

f23=-k2*l12/J12;

f24=-b2*l12/J12;

```

B=[0 0 0 0
    0 0 0 0
    f11 f12 f13 f14
    f21 f22 f23 f24];
//Definição dos elementos da matriz C do espaço de estados
C=[1 0 0 0
    0 1 0 0];
//Definição dos elementos da matriz D do espaço de estados
D=[0 0 0 0
    0 0 0 0];
//Definição do sistema linear
bicicleta2gl=syslin('c',A,B,C,D);
//Definição da condição inicial
xo=[0;0;0;0];
//Definição do vetor de tempo
passo=0.01;
tf=3
t=0:passo:tf;
delay=0.33;
//Definição do vetor de entradas
//Entrada degrau na roda dianteira
u1d=0.05*ones(t);
//Entrada impulso na roda dianteira
u1i=zeros(t);
u1i(1)=0.05;
//Entrada degrau na roda traseira, com defasagem
u2d=zeros(t);
for i=(delay/passo+1):(tf/passo+1)
    u2d(i)=0.05;
end
//Entrada impulso na roda traseira, com defasagem
u2i=zeros(t);
u2i(delay/passo+1)=0.05;
ui=[u1i;zeros(t);u2i;zeros(t)];
ud=[u1d;zeros(t);u2d;zeros(t)];

//Simulando o sistema usando o comando csim
[yi,x]=csim(ui,t,bicicleta2gl,xo);
[yd,x]=csim(ud,t,bicicleta2gl,xo);
plot2d(t,yi(1,:),1)

```

```

plot2d(t,yd(1,:),3)
xlabel("Deslocamento vertical do ciclista 2 gl","Tempo [s]","Subida do quadro [m]")
legends(['Entrada impulso','Entrada degrau'],[1,3],"ur");
xgrid(2)
xset('window',2);
plot2d(t,yi(2,:),1)
plot2d(t,yd(2,:),3)
xlabel("Ângulo de Pitch do ciclista para o modelo com 2 gl","Tempo [s]","Ângulo [rad]")
legends(['Entrada impulso','Entrada degrau'],[1,3],"ur");
xgrid(2)
//Determinação da função de transferência
[Ds,NUM,chi]=ss2tf(bicicleta2gl);
G2l=ss2tf(bicicleta2gl)
//Determinação dos polos do sistema
xset('window',3);
polos=roots(chi(1))
plzr(G2l)
bode(G2l)

//Programa que realiza os procedimentos de modelagem ao modelo de 3 graus de liberdade
clear all
//Definição dos parâmetros físicos do modelo
//massas e momentos de inércia bicicleta (minúsculo) e ciclista (maiusculo):
M13=75+8.5-2.3;
m33=2.3;
J13=10.897-0.012;
//Constantes de amortecimento e elasticas:
b2=272;
b3=272;
b6=200;
k2=134000;
k3=134000;
k6=1500;
//Constantes geométricas:
l13=0.98*0.52;
l23=0.440;
l63=0.45;
//Definição dos elementos da matriz A do espaço de estados
k11=(-k2-k6)/M13;
k12=(-k6*l23+k2*l13)/M13;

```

```

k13=(k6)/M13;
k21=(k2*l13-k6*l63)/J13;
k22=(-k2*(l13^2)-k6*(l23^2))/J13;
k23=(k6*l23)/J13;
k31=(k6)/m33;
k32=(k6*l23)/m33;
k33=(-k3-k6)/m33;
b11=(-b2-b6)/M13;
b12=(-b6*l23+b2*l13)/M13;
b13=(b6)/M13;
b21=(b2*l13-b6*l63)/J13;
b22=(-b2*(l13^2)-b6*(l23^2))/J13;
b23=(b6*l23)/J13;
b31=(b6)/m33;
b32=(b6*l23)/m33;
b33=(-b3-b6)/m33;
A=[0 0 0 1 0 0
    0 0 0 0 1 0
    0 0 0 0 0 1
    k11 k12 k13 b11 b12 b13
    k21 k22 k23 b21 b22 b23
    k31 k32 k33 b31 b32 b33];
//Definição dos elementos da matriz B do espaço de estados
f11=(k2)/M13;
f12=(b2)/M13;
f21=(-k2*l13)/J13;
f22=(-b2*l13)/J13;
f31=(k3)/m33;
f32=(b3)/m33;
B=[0 0 0 0
    0 0 0 0
    0 0 0 0
    0 0 f11 f12
    0 0 f21 f22
    f31 f32 0 0];
//Definição dos elementos da matriz C do espaço de estados
C=[1 0 0 0 0 0
    0 1 0 0 0 0
    0 0 1 0 0 0];
//Definição dos elementos da matriz D do espaço de estados

```

```

D=[0 0 0 0
    0 0 0 0
    0 0 0 0];

//Definição do sistema linear
bicicleta3gl=syslin('c',A,B,C,D);

//Definição da condição inicial
xo=[0;0;0;0;0;0];

//Definição do vetor de tempo
passo=0.01;
tf=3
t=0:passo:tf;
delay=0.33;

//Definição do vetor de entradas
//Entrada degrau na roda dianteira
u1d=0.05*ones(t);
//Entrada impulso na roda dianteira
u1i=zeros(t);
u1i(1)=0.05;
//Entrada degrau na roda traseira, com defasagem
u2d=zeros(t);
for i=(delay/passo+1):(tf/passo+1)
u2d(i)=0.05;
end
//Entrada impulso na roda traseira, com defasagem
u2i=zeros(t);
u2i(delay/passo+1)=0.05;
ui=[u1i;zeros(t);u2i;zeros(t)];
ud=[u1d;zeros(t);u2d;zeros(t)];

//Simulando o sistema usando o comando csim
[yi,x]=csim(ui,t,bicicleta3gl,xo);
[yd,x]=csim(ud,t,bicicleta3gl,xo);
plot2d(t,yi(1,:),1)
plot2d(t,yd(1,:),3)
xtitle("Deslocamento vertical do ciclista 3 gl","Tempo [s]","Subida do quadro [m]")
legends(['Entrada impulso','Entrada degrau'],[1,3],"ur");
xgrid(2)
xset('window',2);
plot2d(t,yi(2,:),1)
plot2d(t,yd(2,:),3)
xtitle("Ângulo de Pitch do ciclista para o modelo com 3 gl","Tempo [s]","Ângulo [rad]")

```

```

legends(['Entrada impulso','Entrada degrau'],[1,3],"ur");
xgrid(2)
//Determinação da função de transferência
[Ds,NUM,chi]=ss2tf(bicicleta3gl);
G3l=ss2tf(bicicleta3gl)
//Determinação dos polos do sistema
xset('window',3);
polos=roots(chi(1))
plzr(G3l)
bode(G3l)

```

//Programa que realiza os procedimentos de modelagem ao modelo de 4 graus de liberdade

```

clear all
//Definição dos parâmetros físicos do modelo
//massas e momentos de inércia bicicleta (minuscuro) e ciclista (maiscuro):
M14=75;
m14=8.5;
J14=15;
j14=2.508;
//Constantes de amortecimento e elasticas:
b2=272;
b3=272;
b4=1000;
b5=202;
k2=134000;
k3=134000;
k4=48650;
k5=14900;
//Constantes geométricas:
l14=0.535;
l24=0.545;
l34=0.250;
l44=0.60;
l54=0.25;
l64=0.43;
//Definição dos elementos da matriz A do espaço de estados
k11=(-k2-k3-k4-k5)/m14;
k12=(l14*k2-l24*k3+l64*k4-l64*k5)/m14;
k13=(-l34*k4+l44*k5)/m14;
k14=(k4+k5)/m14;

```

```

k21=(k2*I14-k3*I24+k4*I54-k5*I64)/j14;
k22=(-k2*I14*I14-k3*I24*I24-k4*I54*I64-k5*I64*I64)/j14;
k23=(k4*I34*I54+k5*I44*I64)/j14;
k24=(-k4*I54+k5*I64)/j14;
k31=(-k4*I34+k5*I44)/J14;
k32=(k4*I34*I64+k5*I44*I64)/J14;
k33=(-k4*I34*I34-k5*I44*I44)/J14;
k34=(k4*I34-k5*I44)/J14;
k41=(k4+k5)/M14;
k42=(-k4*I64-k5*I64)/M14;
k43=(k4*I34-k5*I44)/M14;
k44=(-k4-k5)/M14;
b11= (-b2-b3-b4-b5)/m14;
b12=(I14*b2-I24*b3+I64*b4-I64*b5)/m14;
b13=(-I34*b4+I44*b5)/m14;
b14=(b4+b5)/m14;
b21=(b2*I14-b3*I24+b4*I54-b5*I64)/j14;
b22=(-b2*I14*I14-b3*I24*I24-b4*I54*I64-b5*I64*I64)/j14;
b23=(b4*I64*I54+b5*I44*I64)/j14;
b24=(-b4*I54+b5*I64)/j14;
b31=(-I34*b4+I44*b5)/J14;
b32=(b4*I64*I34+b5*I44*I64)/J14;
b33=(-b4*I34*I34-b5*I44*I44)/J14;
b34=(b4*I34-b5*I44)/J14;
b41=(b4+b5)/M14;
b42=(-b4*I64-b5*I64)/M14;
b43=(b4*I34-b5*I44)/M14;
b44=(-b4-b5)/M14;
A=[0 0 0 0 1 0 0 0
    0 0 0 0 0 1 0 0
    0 0 0 0 0 0 1 0
    0 0 0 0 0 0 0 1
    k11 k12 k13 k14 b11 b12 b13 b14
    k21 k22 k23 k24 b21 b22 b23 b24
    k31 k32 k33 k34 b31 b32 b33 b34
    k41 k42 k43 k44 b41 b42 b43 b44];
//Definição dos elementos da matriz B do espaço de estados
f11=(k3)/m14;
f12=(b3)/m14;
f13=(k2)/m14;

```

```

f14=(b2)/m14;
f21=(k3*l24)/j14;
f22=(b3*l24)/j14;
f23=(-k2*l14)/j14;
f24=(-b2*l14)/j14;
f31=0;
f32=0;
f33=0;
f34=0;
f41=0;
f42=0;
f43=0;
f44=0;
B=[0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 f11 f12 f13 f14
    0 0 0 0 f21 f22 f23 f24
    0 0 0 0 f31 f32 f33 f34
    0 0 0 0 f41 f42 f43 f44];
//Definição dos elementos da matriz C do espaço de estados
C=[0 0 1 0 0 0 0 0
    0 0 0 1 0 0 0 0];
//Definição dos elementos da matriz D do espaço de estados
D=[0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0];
//Definição do sistema linear
bicicleta4gl=syslin('c',A,B,C,D);
//Definição da condição inicial
xo=[0;0;0;0;0;0;0;0];
//Definição do vetor de tempo
passo=0.01;
tf=3
t=0:passo:tf;
delay=0.33;
//Definição do vetor de entradas
//Entrada degrau na roda dianteira
u1d=0.05*ones(t);
//Entrada impulso na roda dianteira

```

```

u1i=zeros(t);
u1i(1)=0.05;
//Entrada degrau na roda traseira, com defasagem
u2d=zeros(t);
for i=(delay/passo+1):(tf/passo+1)
u2d(i)=0.05;
end
//Entrada impulso na roda traseira, com defasagem
u2i=zeros(t);
u2i(delay/passo+1)=0.05;
ui=[zeros(t);zeros(t);zeros(t);zeros(t);u1i;zeros(t);u2i;zeros(t)];
ud=[zeros(t);zeros(t);zeros(t);zeros(t);u1d;zeros(t);u2d;zeros(t)];
//Simulando o sistema usando o comando csim
[yi,x]=csim(ui,t,bicicleta4gl,xo);
[yd,x]=csim(ud,t,bicicleta4gl,xo)
plot2d(t,yi(1,:),1)
plot2d(t,yd(1,:),3)
xtitle("Ângulo de Pitch do ciclista para o modelo com 4 gl","Tempo [s]","Ângulo [rad]")
legends(['Entrada impulso','Entrada degrau'],[1,3],"ur");
xgrid(2)
xset('window',2);
plot2d(t,yi(2,:),1)
plot2d(t,yd(2,:),3)
xtitle("Deslocamento vertical do ciclista 4 gl","Tempo [s]","Subida do quadro [m]")
legends(['Entrada impulso','Entrada degrau'],[1,3],"ur");
xgrid(2)
//Determinação da função de transferência
[Ds,NUM,chi]=ss2tf(bicicleta4gl);
G4l=ss2tf(bicicleta4gl);
//Determinação dos polos do sistema
polos=roots(chi(1));

//Programa que realiza os procedimentos de modelagem ao modelo de 5 graus de liberdade
clear all
//Definição dos parâmetros físicos do modelo
//massas e momentos de inércia bicicleta (minuscuro) e ciclista (maiscuro):
M15=75;
m15=6.5;
m35=M15-m15;
J15=15;

```

$j_{15}=2.508;$

//Constantes de amortecimento e elasticas:

$b_2=272;$

$b_3=272;$

$b_4=1000;$

$b_5=202;$

$b_6=200;$

$k_2=134000;$

$k_3=134000;$

$k_4=48650;$

$k_5=14900;$

$k_6=1500;$

//Constantes geométricas:

$l_{15}=0.535;$

$l_{25}=0.545;$

$l_{35}=0.250;$

$l_{45}=0.60;$

$l_{55}=0.25;$

$l_{65}=0.43;$

//Definição dos elementos da matriz A do espaço de estados

$k_{11}=(-k_2-k_4-k_5-k_6)/m_{15};$

$k_{12}=(l_{15}*k_2+l_{65}*k_4-l_{65}*k_5-l_{65}*k_6)/m_{15};$

$k_{13}=(-l_{35}*k_4+l_{45}*k_5)/m_{15};$

$k_{14}=(k_4+k_5)/m_{15};$

$k_{15}=k_6/m_{35};$

$k_{21}=(k_2*l_{15}+k_4*l_{55}-k_5*l_{65}-l_{65}*k_6)/j_{15};$

$k_{22}=(-k_2*l_{15}*l_{15}-k_4*l_{55}*l_{65}-k_5*l_{65}*l_{65}-k_6*l_{65}*l_{65})/j_{15};$

$k_{23}=(-k_4*l_{35}*l_{55}+k_5*l_{45}*l_{65})/j_{15};$

$k_{24}=(-k_4*l_{55}+k_5*l_{65})/j_{15};$

$k_{25}=(k_6*l_{65})/j_{15};$

$k_{31}=(-k_4*l_{35}+k_5*l_{45})/J_{15};$

$k_{32}=(k_4*l_{35}*l_{65}+k_5*l_{45}*l_{65})/J_{15};$

$k_{33}=(-k_4*l_{35}*l_{35}-k_5*l_{45}*l_{45})/J_{15};$

$k_{34}=(k_4*l_{35}-k_5*l_{45})/J_{15};$

$k_{35}=0;$

$k_{41}=(k_4+k_5)/M_{15};$

$k_{42}=(-k_4*l_{65}+k_5*l_{65})/M_{15};$

$k_{43}=(k_4*l_{35}-k_5*l_{45})/M_{15};$

$k_{44}=(-k_4-k_5)/M_{15};$

$k_{45}=0;$

$k_{51}=k_6/m_{35};$
 $k_{52}=l_{65}*k_6/m_{35};$
 $k_{53}=0;$
 $k_{54}=0;$
 $k_{55}=(-k_3-k_6)/m_{35};$
 $b_{11}=(-b_2-b_4-b_5-b_6)/m_{15};$
 $b_{12}=(l_{15}*b_2+l_{65}*b_4-l_{65}*b_5-l_{65}*b_6)/m_{15};$
 $b_{13}=(-l_{35}*b_4+l_{45}*b_5)/m_{15};$
 $b_{14}=(b_4+b_5)/m_{15};$
 $b_{15}=b_6/m_{35};$
 $b_{21}=(b_2*l_{15}+b_4*l_{55}-b_5*l_{65}-l_{65}*b_6)/j_{15};$
 $b_{22}=(-b_2*l_{15}*l_{15}-b_4*l_{55}*l_{65}-b_5*l_{65}*l_{65}-b_6*l_{65}*l_{65})/j_{15};$
 $b_{23}=(-b_4*l_{35}*l_{55}+b_5*l_{45}*l_{65})/j_{15};$
 $b_{24}=(-b_4*l_{55}+b_5*l_{65})/j_{15};$
 $b_{25}=(b_6*l_{65})/j_{15};$
 $b_{31}=(-b_4*l_{35}+b_5*l_{45})/J_{15};$
 $b_{32}=(b_4*l_{35}*l_{65}+b_5*l_{45}*l_{65})/J_{15};$
 $b_{33}=(-b_4*l_{35}*l_{35}-b_5*l_{45}*l_{45})/J_{15};$
 $b_{34}=(b_4*l_{35}-b_5*l_{45})/J_{15};$
 $b_{35}=0;$
 $b_{41}=(b_4+b_5)/M_{15};$
 $b_{42}=(-b_4*l_{65}+b_5*l_{65})/M_{15};$
 $b_{43}=(b_4*l_{35}-b_5*l_{45})/M_{15};$
 $b_{44}=(-b_4-b_5)/M_{15};$
 $b_{45}=0;$
 $b_{51}=b_6/m_{35};$
 $b_{52}=l_{65}*b_6/m_{35};$
 $b_{53}=0;$
 $b_{54}=0;$
 $b_{55}=(-b_3-b_6)/m_{35};$
 $A=[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}]$
 $k_{11} \ k_{12} \ k_{13} \ k_{14} \ k_{15} \ b_{11} \ b_{12} \ b_{13} \ b_{14} \ b_{15}$
 $k_{21} \ k_{22} \ k_{23} \ k_{24} \ k_{25} \ b_{21} \ b_{22} \ b_{23} \ b_{24} \ b_{25}$
 $k_{31} \ k_{32} \ k_{33} \ k_{34} \ k_{35} \ b_{31} \ b_{32} \ b_{33} \ b_{34} \ b_{35}$
 $k_{41} \ k_{42} \ k_{43} \ k_{44} \ k_{45} \ b_{41} \ b_{42} \ b_{43} \ b_{44} \ b_{45}$
 $k_{51} \ k_{52} \ k_{53} \ k_{54} \ k_{55} \ b_{51} \ b_{52} \ b_{53} \ b_{54} \ b_{55}$

```

];
//Definição dos elementos da matriz B do espaço de estados
f11=0;
f12=0;
f13=0;
f14=(k2)/m15;
f15=(b2)/m15;
f21=0;
f22=0;
f23=0;
f24=(-k2*l15)/j15;
f25=(-b2*l15)/j15;
f31=0;
f32=0;
f33=0;
f34=0;
f35=0;
f41=0;
f42=0;
f43=0;
f44=0;
f45=0;
f51=0;
f52=(k3*l24)/j15;
f53=(b3*l24)/j15;
f54=0;
f55=0;
B=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 f11 f12 f13 f14 f15
    0 0 0 0 0 f21 f22 f23 f24 f25
    0 0 0 0 0 f31 f32 f33 f34 f35
    0 0 0 0 0 f41 f42 f43 f44 f45
    0 0 0 0 0 f51 f52 f53 f54 f55
];
//Definição dos elementos da matriz C do espaço de estados
C=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

```

0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0];
//Definição dos elementos da matriz D do espaço de estados
D=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
//Definição do sistema linear
bicicleta5gl=syslin('c',A,B,C,D);
//Definição da condição inicial
xo=[0;0;0;0;0;0;0;0;0];
//Definição do vetor de tempo
passo=0.01;
tf=5
t=0:passo:tf;
delay=0.33;
//Definição do vetor de entradas
//Entrada degrau na roda dianteira
u1=0.05*ones(t);
//Entrada impulso na roda dianteira
u2=zeros(t);
u2(1)=0.05;
//Entrada degrau na roda traseira, com defasagem
u3=zeros(t);
for i=(delay/passo+1):(tf/passo+1)
u3(i)=0.05;
end
//Entrada impulso na roda traseira, com defasagem
u4=zeros(t);
u4(delay/passo+1)=0.05;
u=[zeros(t);zeros(t);zeros(t);zeros(t);zeros(t);zeros(t);u1;u2;u3;u4];
//Simulando o sistema usando o comando csim
[y,x]=csim(u,t,bicicleta5gl,xo);
plot2d(t,y(1,:),3)
xlabel("Resposta da Bicicleta 5 gl","Tempo [s]","Subida do quadro [m]")
xgrid(2)

```

% Programas em matlab e mathematica

MODELO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

TMB

```
(
-k2*(u(2)-u(7)-l41*u(4))
-k3*(u(2)-u(5)+l31*u(4))
-b2*(u(1)-u(8)-l41*u(3))
-b3*(u(1)-u(6)+l31*u(3))
)
/M1
```

TMA

```
(
+k2*l41*(u(2)-u(7)-l41*u(4))
-k3*l31*(u(2)-u(5)+l31*u(4))
+b2*l41*(u(1)-u(8)-l41*u(3))
-b3*l31*(u(1)-u(6)+l31*u(3))
)
/J1
```

MODELO COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

TMB 1

```
(
-k2*(u(2)-u(9)-l42*u(4))
-k5*(u(2)-u(6)+l32*u(4))
-b2*(u(1)-u(10)-l42*u(3))
-b5*(u(1)-u(5)+l32*u(3))
)
/M2
```

TMA 1

```
(
+k2*l42*(u(2)-u(9)-l42*u(4))
-k5*l32*(u(2)-u(6)+l32*u(4))
+b2*l42*(u(1)-u(10)-l42*u(3))
-b5*l32*(u(1)-u(5)+l32*u(3))
)
/J2
```

TMB 2

$$\begin{aligned}
 & (\\
 & -k3*(u(6)-u(7)) \\
 & +k6*(u(2)-u(6)+l32*u(4)) \\
 & -b3*(u(5)-u(8)) \\
 & +b6*(u(1)-u(5)+l32*u(3)) \\
 &) \\
 & /m2
 \end{aligned}$$

MODELO COM 5 GRAUS DE LIBERDADE

TMB_1_4

$$\begin{aligned}
 & (\\
 & -k2*(u(2)-u(13)-l4*u(4)) \\
 & -b2*(u(1)-u(14)-l4*u(3)) \\
 & +k4*(\cos(al)*u(8)-l2*\cos(be)*u(6)-u(2)+l4*u(4)) \\
 & +k5*\cos(al)*(\cos(al)*u(8)+l1*u(6)-\cos(al)*u(2)-l3*\cos(al)*u(4)) \\
 & +b4*(u(7)-l2*u(5)*\cos(be)-u(1)+l4*u(3)) \\
 & +b5*\cos(al)*(u(7)*\cos(al)+l1*u(5)-\cos(al)*u(1)-l3*\cos(al)*u(3)) \\
 & +k6*(u(2)-u(10)+l32*u(4)) \\
 & +b6*(u(1)-u(9)+l32*u(3)) \\
 &)/m
 \end{aligned}$$

TMA_1_4

$$\begin{aligned}
 & (\\
 & +k2*l4*(u(2)-u(13)-l4*u(4)) \\
 & +b2*l4*(u(1)-u(14)-l4*u(3)) \\
 & -k4*l4*(\cos(al)*u(8)-l2*\cos(be)*u(6)-u(2)+l4*u(4)) \\
 & +k5*\cos(al)*l3*(\cos(al)*u(8)+l1*u(6)-\cos(al)*u(2)-l3*\cos(al)*u(4)) \\
 & -b4*l4*(u(7)-l2*u(5)-u(1)+l4*u(3)) \\
 & +b5*l3*\cos(al)*(u(7)*\cos(al)+l1*u(5)-\cos(al)*u(1)-l3*\cos(al)*u(3)) \\
 & +k6*l32*(u(2)-u(10)+l32*u(4)) \\
 & +b6*l32*(u(1)-u(9)+l32*u(3)) \\
 &)/j
 \end{aligned}$$

TMB_3_4

$$\begin{aligned}
 & (\\
 & -k3*(u(6)-u(13)) \\
 & -b3*(u(5)-u(14)) \\
 & +k6*(u(2)-u(10)+l32*u(4)) \\
 & +b6*(u(1)-u(9)+l32*u(3)) \\
 &) \\
 & /m2
 \end{aligned}$$

MODELO COM 6 GRAUS DE LIBERDADE

% Energia cinética notação Mathematica

$$T = 1/2 m_{16} q_1'^2 + 1/2 j_{16} q_2'^2 + 1/2 m_{36} ((-q_5' \text{senal} + l_{66} q_2')^2 + (q_1' + \text{cosal} q_5' - l_{26} q_2')^2) + 1/2 m_{26} ((-l_{66} q_2')^2 + (q_1' + l_{56} q_6' + l_{16} q_2')^2) + 1/2 j_{36} q_2'^2 + 1/2 j_{26} (q_2' + q_6')^2 + 1/2 M_{16} q_4'^2 + 1/2 J_{16} q_3'^2$$

% Derivadas parciais

$$\begin{aligned} A1 &= D[T, q_1'] \\ &= m_{16} q_1' + m_{36} (q_1' - l_{26} q_2' + \text{cosal} q_5') + m_{26} (q_1' + l_{16} q_2' + l_{56} q_6') \\ A2 &= D[T, q_2'] \\ &= j_{16} q_2' + j_{36} q_2' + 1/2 m_{36} (-2 l_{26} (q_1' - l_{26} q_2' + \text{cosal} q_5') - 2 l_{66} (-l_{66} q_2' - \text{senal} q_5')) + j_{26} (q_2' + q_6') + 1/2 m_{26} (2 l_{66} q_2' + 2 l_{16} (q_1' + l_{16} q_2' + l_{56} q_6')) \\ A3 &= D[T, q_3'] \\ &= 1/2 J_{16} M_{16} q_3' q_4'^2 \\ A4 &= D[T, q_4'] \\ &= 1/2 J_{16} M_{16} q_3'^2 q_4' \\ A5 &= D[T, q_5'] \\ &= 1/2 m_{36} (2 \text{cosal} (q_1' - l_{26} q_2' + \text{cosal} q_5') - 2 \text{senal} (-l_{66} q_2' - \text{senal} q_5')) \\ A6 &= D[T, q_6'] \\ &= j_{26} (q_2' + q_6') + l_{56} m_{26} (q_1' + l_{16} q_2' + l_{56} q_6') \end{aligned}$$

% Derivadas em relação ao tempo

$$\begin{aligned} B1 &= D[A1, t] \\ &= m_{16} q_1'' + m_{36} (q_1'' - l_{26} q_2'' + \text{cosal} q_5'') + m_{26} (q_1'' + l_{16} q_2'' + l_{56} q_6'') \\ B2 &= D[A2, t] \\ &= j_{16} q_2'' + j_{36} q_2'' + 1/2 m_{36} (-2 l_{26} (q_1'' - l_{26} q_2'' + \text{cosal} q_5'') - 2 l_{66} (-l_{66} q_2'' - \text{senal} q_5'')) + j_{26} (q_2'' + q_6'') + 1/2 m_{26} (2 l_{66} q_2'' + 2 l_{16} (q_1'' + l_{16} q_2'' + l_{56} q_6'')) \\ B3 &= D[A3, t] \\ &= 1/2 J_{16} M_{16} q_4'^2 q_3'' + J_{16} M_{16} q_3' q_4' q_4'' \\ B4 &= D[A4, t] \\ &= J_{16} M_{16} q_3' q_4' q_3'' + 1/2 J_{16} M_{16} q_3'^2 q_4'' \\ B5 &= D[A5, t] \\ &= 1/2 m_{36} (2 \text{cosal} (q_1'' - l_{26} q_2'' + \text{cosal} q_5'') - 2 \text{senal} (-l_{66} q_2'' - \text{senal} q_5'')) \\ B6 &= D[A6, t] \\ &= j_{26} (q_2'' + q_6'') + l_{56} m_{26} (q_1'' + l_{16} q_2'' + l_{56} q_6'') \end{aligned}$$

% Função dissipativa

$$Q = 0.5 \{ b_2 (q_6' - u_2')^2 + b_3 (q_5' - u_1')^2 + b_4 (q_4' - q_3')^2 + b_5 (q_4' + q_3')^2 + b_6 (q_1' + q_2')^2 + b_7 (l_{86} q_6' - q_1' + q_2')^2 \}$$

$$\{0.5 (b4 (-q1'^{[t]}+156 q2'^{[t]}-134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})^2+b5 (-q1'^{[t]}+166 q2'^{[t]}+134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})^2+b6 (q1'^{[t]}+166 q2'^{[t]}-q5'^{[t]})^2+b7 (-q1'^{[t]}+196 q2'^{[t]}+186 q6'^{[t]})^2+b3 (q5'^{[t]}-u1'^{[t]})^2+b2 (176 q6'^{[t]}-u2'^{[t]})^2)\}$$

%Derivadas Parciais

$$E1=D[Q,q1'^{[t]}]$$

$$\{0.5 \cdot (-2 b4 (-q1'^{[t]}+156 q2'^{[t]}-134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})-2 b5 (-q1'^{[t]}+166 q2'^{[t]}+134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})+2 b6 (q1'^{[t]}+166 q2'^{[t]}-q5'^{[t]})-2 b7 (-q1'^{[t]}+196 q2'^{[t]}+186 q6'^{[t]})\}$$

$$E2=D[Q,q2'^{[t]}]$$

$$\{0.5 (2 b4 156 (-q1'^{[t]}+156 q2'^{[t]}-134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})+2 b5 166 (-q1'^{[t]}+166 q2'^{[t]}+134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})+2 b6 166 (q1'^{[t]}+166 q2'^{[t]}-q5'^{[t]})+2 b7 196 (-q1'^{[t]}+196 q2'^{[t]}+186 q6'^{[t]})\}$$

$$E3=D[Q,q3'^{[t]}]$$

$$\{0.5 (-2 b4 134 (-q1'^{[t]}+156 q2'^{[t]}-134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})+2 b5 134 (-q1'^{[t]}+166 q2'^{[t]}+134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})\}$$

$$E4=D[Q,q4'^{[t]}]$$

$$\{0.5 (2 b4 (-q1'^{[t]}+156 q2'^{[t]}-134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})+2 b5 (-q1'^{[t]}+166 q2'^{[t]}+134 q3'^{[t]}+q4'^{[t]})\}$$

$$E5=D[Q,q5'^{[t]}]$$

$$\{0.5 (-2 b6 (q1'^{[t]}+166 q2'^{[t]}-q5'^{[t]})+2 b3 (q5'^{[t]}-u1'^{[t]})\}$$

$$E6=D[Q,q6'^{[t]}]$$

$$\{0.5 (2 b7 186 (-q1'^{[t]}+196 q2'^{[t]}+186 q6'^{[t]})+2 b2 176 (176 q6'^{[t]}-u2'^{[t]})\}$$

% Energia Potencial elástica

$$V=0.5 \{k2*(q6*176-u2)^2+k3*(q5-u1)^2+k4*(q4-q3*134-q1+q2*156)^2+k5*(q4+q3*134-q1+q2*166)^2+k6*(q1+q2*166-q5)^2+k7*(186*q6-q1+q2*196)^2\}$$

$$\{0.5 (k4 (-q1+156 q2-134 q3+q4)^2+k5 (-q1+166 q2+134 q3+q4)^2+k6 (q1+166 q2-q5)^2+k7 (-q1+196 q2+186 q6)^2+k3 (q5-u1)^2+k2 (176 q6-u2)^2)\}$$

% Derivadas parciais

$$C1=D[V,q1]$$

$$\{0.5 (-2 k4 (-q1+156 q2-134 q3+q4)-2 k5 (-q1+166 q2+134 q3+q4)+2 k6 (q1+166 q2-q5)-2 k7 (-q1+196 q2+186 q6))\}$$

$$C2=D[V,q2]$$

$$\{0.5 (2 k4 156 (-q1+156 q2-134 q3+q4)+2 k5 166 (-q1+166 q2+134 q3+q4)+2 k6 166 (q1+166 q2-q5)+2 k7 196 (-q1+196 q2+186 q6))\}$$

$$C3=D[V,q3]$$

$$\{0.5 (-2 k4 134 (-q1+156 q2-134 q3+q4)+2 k5 134 (-q1+166 q2+134 q3+q4))\}$$

$$C4=D[V,q4]$$

$$\{0.5 (2 k4 (-q1+156 q2-134 q3+q4)+2 k5 (-q1+166 q2+134 q3+q4))\}$$

$$C5=D[V,q5]$$

$$\{0.5 (-2 k6 (q1+166 q2-q5)+2 k3 (q5-u1))\}$$

$$C6=D[V,q6]$$

$$\{0.5 (2 k7 186 (-q1+196 q2+186 q6)+2 k2 176 (176 q6-u2))\}$$

13. Anexo 2

Parâmetros físicos para simulink e trabalho algébrico do modelo 6

```

%%%%%%%%%%%%%% Escola Politécnica da USP
%%%%%%%%%%%%%% Atila Felipe Onaya
%%%%%%%%%%%%%% 5483180
clear
%Definindo o os parâmetros do sistema:
%massas e momentos de inércia bicicleta (minúsculo) e ciclista
(maiúsculo):
    M=75;
    m=8.5;
    J=10.897;
    j=2.508;
%modelo com 2 graus de liberdade
    M12=M+m;
    J12=J+j+0.75;
%modelo com 3 graus de liberdade
    m33=2.3;
    M13=M12-m33;
    J13=J12-0.012;
%modelo com 4 graus de liberdade
    M14=M;
    m14=m;
    J14=J;
    j14=j;
%modelo com 5 graus de liberdade
    M15=M;
    m15=6.5;
    m35=m-m15;
    J15=J;
    j15=j;
%modelo com 6 graus de liberdade
    M16=M;
    m16 = 4.5;
    j16 = 2.508;
    j36 = 1.401;
    m26 = 3.0;
    m36 = 2.0;
    M16 = 70;
    J16 = 10.897;
    l76 = 0.33;
%constantes de amortecimento e elasticas:
    b2=272;
    b3=272;
    k2=134000;
    k3=134000;
    b4=1000;
    b5=202;
    k4=48650;
    k5=14900;
    k6=1500;
    b6=200;
    k7=15000;
    b7=200;
%constantes geométricas:
%modelo com 2 graus
    l12=0.520;
    l22=0.560;

```

```

%modelo com 3 graus
    l13=0.98*l12;
    l23=0.440;
    l63=0.45;
    cosal=0.92;
%modelo com 4 graus de liberdade
    l14=0.535;
    l24=0.545;
    l34=0.250;
    l44=0.60;
    l54=0.25;
    l64=0.43;
%modelo com 5 graus de liberdade
    l15=0.535;
    l25=0.545;
    l35=0.250;
    l45=0.60;
    l55=0.25;
    l65=0.43;
%modelo com 6 graus de liberdade
    l16=0.535;
    l26=0.545;
    l36=0.250;
    l46=0.60;
    l56=0.25;
    l66=0.43;
    l76=0.33;
    l86=0.32;
    l96=0.28;
%Matriz de inércia do modelo 6
    M = [m16 0 0 0 0 0;
    0 j16 j36 0 0 j36;
    0 0 J16 0 0 0;
    0 0 0 M16 0 0;
    0 0 0 0 m26 0;
    0 j36 0 0 0 l76*m36 + j36];
% Inversa de M
    A = inv(M);
% Matriz de amortecimento e de elasticidade
    B1 = [b4+b5+b6+b7 -l56*b4-l66*b5+l66*b6-l96*b7 +l34*b4-
    l34*b5 -b4-b5 -b6 -l86*b7;
    -l56*b4-l66*b5+l66*b6-l96*b7
    l56*l56*b4+l66*l66*b5+l66*l66*b6+l96*l96*b7 -
    l56*l34*b4+l66*l34*b5 l56*b4+l66*b5 -l66*b6 l96*l86*b7;
    +b4*l34-l34*b5 -l56*b4*l34+b5*l34*l66
    +b4*l34*l34+b5*l34*l34 -b4*l34+b5*l34 0 0;
    -b4-b5 b4*l56+l66*b5 -l34*b4+l34*b5 b4+b5 0 0;
    -b6 -l66*b6 0 0 +b6+b3 0;
    -b7*l86 l86*l96*b7 0 0 0 b7*l86*l86+b2*l76*l76
    ];
    K1 = [k4+k5+k6+k7 -l56*k4-l66*k5+l66*k6-l96*k7 +l34*k4-
    l34*k5 -k4-k5 -k6 -l86*k7;
    -l56*k4-l66*k5+l66*k6-l96*k7
    l56*l56*k4+l66*l66*k5+l66*l66*k6+l96*l96*k7 -
    l56*l34*k4+l66*l34*k5 l56*k4+l66*k5 -l66*k6 l96*l86*k7;
    +k4*l34-l34*k5 -l56*k4*l34+k5*l34*l66
    +k4*l34*l34+k5*l34*l34 -k4*l34+k5*l34 0 0;
    -k4-k5 k4*l56+l66*k5 -l34*k4+l34*k5 k4+k5 0 0;
    -k6 -l66*k6 0 0 +k6+k3 0;
    -k7*l86 l86*l96*k7 0 0 0 k7*l86*l86+k2*l76*l76
    ];

```

```

%Matrizes de entradas

U31=[ 0;
      0;
      0;
      0;
      k3;
      0];
U32=[ 0;
      0;
      0;
      0;
      b3;
      0];
U21=[ 0;
      0;
      0;
      0;
      0;
      k2];
U22=[ 0;
      0;
      0;
      0;
      0;
      b2];
%matrizes corrigidas com a inversa de inércia

B2=-1*A*B1;
K2=-1*A*K1;
U311=A*U31;
U321=A*U32;
U211=A*U21;
U221=A*U22;

```

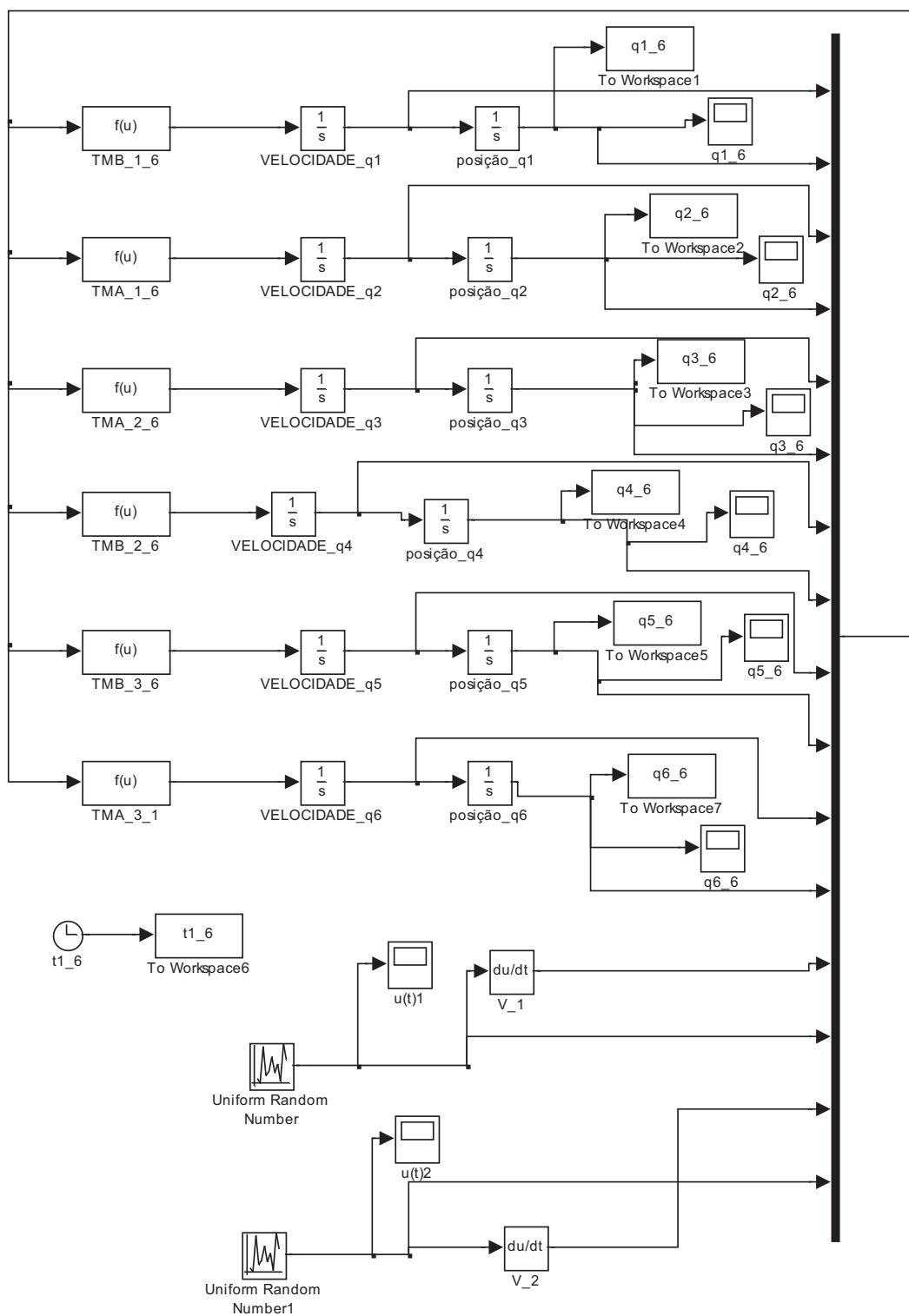


Figura 57: Diagrama simulink modelo 6